



GREThA

Groupe de Recherche en
Économie Théorique et Appliquée

Mesurer les inégalités économiques

Patrick MOYES

*Université de Bordeaux
GREThA UMR CNRS 5113*

*Cahiers du GREThA
n° 2009-06*

GRETHA UMR CNRS 5113
Université Montesquieu Bordeaux IV
Avenue Léon Duguit - 33608 PESSAC - FRANCE
Tel : +33 (0)5.56.84.25.75 - Fax : +33 (0)5.56.84.86.47 - www.gretha.fr

Mesurer les Inégalités Économiques

Résumé

Cet article présente la manière dont est appréhendée la mesure de l'inégalité des revenus en économie. Nous rappelons les propriétés minimales que tout indice d'inégalité doit satisfaire en insistant sur la distinction entre les indices d'inégalité relative et les indices d'inégalité absolue. Nous présentons ensuite l'approche éthique de la mesure des inégalités et en déduisons les familles d'indices d'Atkinson-Kolm-Sen (AKS) et de Kolm-Pollak (KP). La recherche du consensus nous amène dans un troisième temps à introduire les critères de Lorenz relatif et de Lorenz absolu. La nécessité de mesurer la contribution à l'inégalité totale de telle ou telle composante du revenu ou de telle ou telle partie de la population nous conduit en dernier lieu à examiner les propriétés de décomposition des indices.

Mots Clé : Indices d'Inégalité, Propriétés Minimales d'un Indice d'Inégalité, Mesure Éthique de l'Inégalité, Courbes de Lorenz, Décomposition de l'Inégalité.

Measuring Economic Inequalities

Abstract

We give in this note an overview of the way income inequality is approached in economics. We first recall the basic properties that any inequality index is required to possess and we insist on the distinction between the indices of relative inequality and the indices of absolute inequality. We present next the ethical approach to inequality measurement and we derive the Atkinson-Kolm-Sen (AKS) and the Kolm-Pollak (KP) families of indices. The search for a consensus among general classes of indices leads us to the criteria of relative Lorenz and absolute Lorenz dominances. Finally we briefly discuss the properties of decomposability that allow one to measure the contribution to overall income inequality of the inequality attached to a particular subgroup of the population or to a particular income source.

Journal of Economic Literature Classification Number: D30, D63.

Keywords: Inequality Indices, Minimal Properties for an Inequality Index, Lorenz Curves, Ethical Inequality Indices, Decomposition of Inequality.

1. Introduction

Il est peu de questions qui suscitent autant de discussions et de controverses dans la société que celle des inégalités. Si tous les acteurs s'accordent à reconnaître que trop d'inégalités peut remettre en cause la cohésion sociale, par contre les avis divergent en ce qui concerne, tant les moyens à mettre en œuvre pour réduire celles-ci, que les instruments pour les mesurer. Cet article présente la manière dont l'inégalité est appréhendée par les économistes ainsi que les instruments qui ont été développés au cours des quarante dernières années pour la mesurer. L'exposé ne prétend pas être exhaustif – du fait des limites d'espace imparties et des préférences de l'auteur – mais il devrait toutefois présenter l'essentiel de la contribution de l'*économie normative* à la mesure de l'inégalité.

L'économiste est parmi d'autres spécialistes des sciences sociales appelé à donner son avis sur des questions aussi diverses que: (i) l'inégalité des revenus est-elle aujourd'hui plus importante en France qu'au Royaume-Uni? (ii) l'inégalité des rémunérations en France a-t-elle augmenté au cours des trente dernières années? (iii) cette augmentation a-t-elle été plus forte depuis le début des années 2000 qu'au cours de la décennie précédente? (iv) l'introduction d'un revenu minimum garanti assorti d'une augmentation du taux marginal d'imposition pour les hauts revenus se traduit-elle par une diminution de l'inégalité des revenus disponibles? (v) l'augmentation des inégalités est-elle également répartie dans la population ou touche-t-elle tel groupe social plutôt que tel autre? (vi) les inégalités de revenus que l'on observe aujourd'hui trouvent-elles leurs origines dans les inégalités des rémunérations du travail ou plutôt dans les inégalités des revenus du patrimoine?

Les réponses aux questions précédentes nécessitent que l'on précise le *concept d'inégalité* – qu'est-ce que l'inégalité – et que l'on définisse des *mesures de l'inégalité* appropriées. Le concept d'inégalité – qui peut varier dans le temps et entre les cultures – est précisé par les propriétés que doivent satisfaire les mesures de l'inégalité. On distingue les propriétés de nature éthique ou normative, qui font intervenir des jugements de valeurs, et les propriétés de nature plus technique, qui sont davantage liées à des considérations pratiques.¹ Les deux premières questions ainsi que la quatrième nécessitent seulement que l'on soit capable d'*ordonner* les situations du point de vue de la plus ou moins grande inégalité. Pour répondre à la troisième question il faut pouvoir comparer des *différences* d'inégalité ou à tout le moins considérer qu'effectuer de telles comparaisons a un sens. La cinquième question suppose que l'on soit capable de *décomposer l'inégalité totale* en la somme des inégalités des différents groupes qui constituent la société, cependant que la dernière question a trait à l'importance respective des différentes composantes du revenu dans l'inégalité du revenu total.

2. Le Concept d'Inégalité en Économie

Avant de se lancer dans la construction d'indicateurs sophistiqués, il faut insister sur le fait que les enseignements que l'on pourra en tirer dépendront dans une large mesure de décisions qui se situent en amont du choix de l'indicateur. Le meilleur indicateur pourra conduire à des conclusions dénuées de sens si l'on ne prend garde dans un premier temps à réfléchir au choix des *variables pertinentes*, à celui des *unités détentrices de revenu*, ainsi qu'à la *période d'observation*.

¹ La distinction entre ces deux types de propriétés n'est pas toujours aussi aisée qu'elle peut sembler de prime abord.

Les variables pertinentes On assimile traditionnellement les inégalités économiques à celles ayant trait à la distribution des revenus dans la société. L'hypothèse implicite à l'origine de cette manière de procéder est que le revenu décrit l'ensemble des opportunités, qui s'offrent aux agents économiques, ces derniers étant libres de choisir celles qu'ils préfèrent parmi celles-ci. Le revenu constitue de ce point de vue pour les agents un vecteur essentiel de leur bien-être et c'est à ce titre que la réduction des inégalités de revenu participe à celle des injustices. Ceci implique que la notion de revenu retenue doit être suffisamment exhaustive et intégrer toutes les sources de revenu des agents, qu'ils s'agissent des rémunérations du travail (salaires), des revenus fonciers (loyers) ou encore du produit d'actifs financiers (revenu d'un portefeuille d'actions). De même il paraît préférable d'utiliser le revenu après acquittement des différents impôts directs (cotisation sociale généralisée (CSG), impôt sur le revenu des personnes physiques (IRPP)) et après transferts (aide aux logement, allocations familiales).

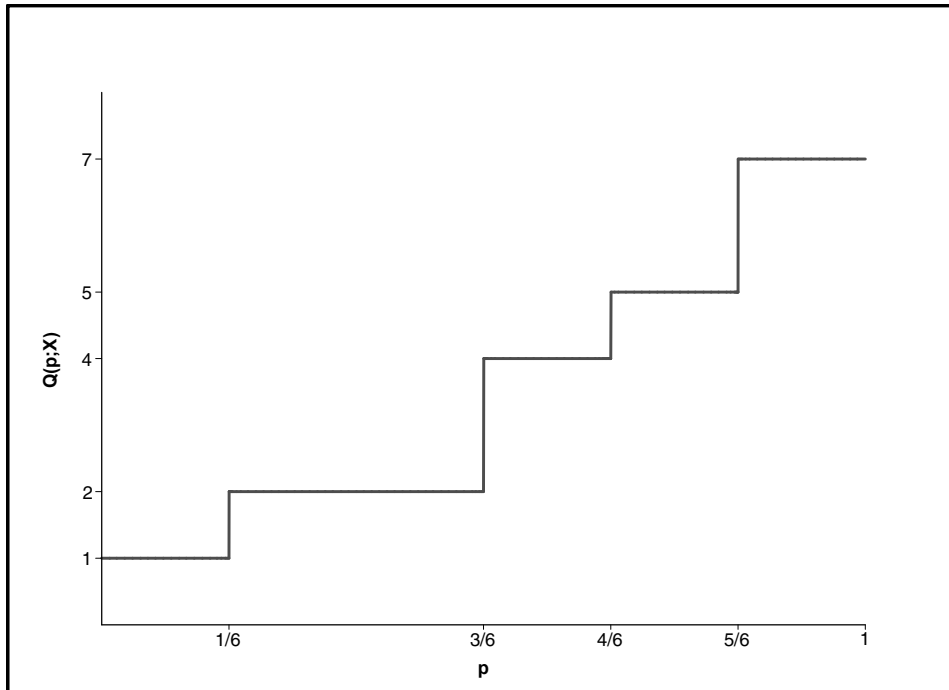
Les unités détentrices de revenu Dans la mesure où on conçoit le revenu comme un facteur essentiel du bien-être, il paraît naturel de s'intéresser aux personnes ou individus qui composent la société. On est alors confronté au fait qu'il est généralement difficile sinon impossible – pour des raisons techniques (collecte des informations) mais aussi légales (loi informatique et libertés) – d'avoir accès à des données individuelles. Très souvent, il est seulement possible d'obtenir le revenu d'un ensemble d'individus, tel que le ménage (enquêtes de consommation) ou le foyer fiscal (fichiers de l'administration fiscale). Il est alors nécessaire d'ajuster les revenus obtenus dans la mesure où on conçoit bien que la composition du ménage ou du foyer fiscal interviendra dans la détermination du bien-être de chacun de ses membres. On conçoit aisément qu'un couple avec deux enfants ait davantage de besoins qu'un couple sans enfant. En effet le couple sans enfant devra mobiliser moins de ressources que le couple avec enfants pour garantir à chacun de ses membres un niveau de vie comparable à celui dont bénéficie chacun des membres du second ménage. La pratique courante consiste à ajuster les revenus observés au moyen d'*échelles d'équivalence* de manière à prendre en compte les différences de besoins liés à la taille et à la composition du ménage ou du foyer fiscal.

La période d'observation Enfin le choix de la période au cours de laquelle sont perçus les revenus est particulièrement importante. Doit-on s'intéresser à la distribution des revenus au cours d'une année donnée ou sur une période plus longue pouvant aller jusqu'à la durée de vie de l'individu? La distinction entre court terme (année) et long terme (cycle de vie) n'est pas neutre, tant en ce qui concerne les résultats obtenus, que leur signification. Ainsi, une forte inégalité au sein d'une même classe d'âge n'aura pas la même signification selon qu'elle est transitoire ou permanente. De même, la comparaison des inégalités de revenu entre la France et le Royaume-Uni à une même date nous renseigne peu sur le caractère plus ou moins égalitaire de ces deux sociétés.

3. Quelques Indicateurs Usuels

Une *distribution* de revenu pour une population de n individus est une liste $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$, où x_i est le revenu de l'individu i . La *moyenne* de \mathbf{x} est notée $\mu(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$. La *fonction quantile* de \mathbf{x} notée $Q(\cdot; \mathbf{x})$ associe à chaque fraction p de la population le revenu $Q(p; \mathbf{x})$ détenu par celle-ci. Suivant les valeurs de p auxquelles on s'intéresse, on obtient différents quantiles. Ainsi les *quartiles* correspondent au cas où p prend les valeurs 0.25, 0.50, 0.75 et 1.00: ceci revient à diviser la population en quatre groupes d'effectifs égaux et à

Figure 1: Fonction Quantile



associer à chaque groupe le revenu moyen du groupe. Les *quintiles* s'obtiennent en divisant la population en cinq groupes de mêmes effectifs, les *déciles* en considérant dix groupes de mêmes effectifs, et ainsi de suite.² Nous avons représenté dans la Figure 1 la fonction quantile de la distribution $\mathbf{x} = (1, 2, 2, 4, 5, 7)$. Un *indicateur d'inégalité* est une application *continue* I qui associe à toute distribution \mathbf{x} un nombre réel $I(\mathbf{x})$ représentant le degré d'inégalité dans la distribution \mathbf{x} . Nous donnons ci-dessous les définitions des indicateurs de pauvreté les plus couramment utilisés dans la littérature: le *rapport interdécile* ID , la *variance* V , le *coefficient de variation* CV , le *coefficient de Gini* G et les deux *indices de Theil* T_1 et T_2 .

$$ID(\mathbf{x}) = \frac{Q(1.0; \mathbf{x})}{Q(0.1; \mathbf{x})}$$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x_i - \mu(\mathbf{x})]^2$$

$$CV(\mathbf{x}) = \frac{V(\mathbf{x})}{\mu(\mathbf{x})^2}$$

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{2n^2\mu(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j|$$

$$T_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\mu(\mathbf{x})} \ln \frac{x_i}{\mu(\mathbf{x})}$$

$$T_2(\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\mu(\mathbf{x})}$$

² Cette manière de procéder entraîne une perte d'information et ce, d'autant plus, que le nombre de quantiles considérés est faible.

Le Tableau 1 indique le degré d'inégalité dans sept pays mesurée à partir des indices d'inégalité précédents. ³

Table 1: Inégalité dans 7 Pays

PAYS	ID	\sqrt{V}	CV	G	T_1	T_2
1. Allemagne	14.2906	8982.51	0.4650	0.2495	10.0362	10.5067
2. Canada	19.0711	12146.61	0.5265	0.2818	12.7267	13.4683
3. Royaume-Uni	19.7136	12567.14	0.6162	0.3180	16.3122	16.3994
4. États-Unis	50.2918	19901.44	0.7041	0.3478	20.3373	21.2555
5. Suède	13.9472	7743.71	0.4323	0.2322	8.7354	9.1400
6. Norvège	14.2026	10004.28	0.4248	0.2225	8.2171	8.4057
7. Finlande	9.2321	7604.81	0.4299	0.2278	8.3743	8.3665

4. Propriétés d'un Indicateur d'Inégalité

Le Tableau 1 montre que le classement des pays du point de vue de la plus ou moins grande inégalité n'est pas insensible au choix de l'indicateur retenu même s'il met en évidence une certaine stabilité. Au vu de ces résultats on peut se demander si certains indicateurs ne seraient pas plus pertinents que d'autres. Afin de juger de la plus ou moins grande pertinence d'un indicateur, nous introduisons un certain nombre de conditions raisonnables que tout indicateur d'inégalité devrait vérifier. Ces conditions indiquent de quelle manière un indicateur d'inégalité doit réagir à des modifications particulières de la distribution des revenus.

Par définition les détenteurs de revenu sont considérés comme étant identiques à tous égards sauf naturellement en ce qui concerne le revenu. Il n'y a donc pas lieu de traiter ceux-ci de manière différente: ainsi les distributions $\mathbf{x} = (2, 7, 9, 3)$ et $\mathbf{y} = (7, 3, 2, 9)$ devraient-elles être considérées comme équivalentes du point de vue de l'inégalité, ce que traduit la condition suivante.

SYMÉTRIE (S). L'inégalité n'est pas modifiée lorsque deux individus échangent leurs revenus.

Considérons maintenant les distributions $\mathbf{y} = (7, 3)$ et $\mathbf{x} = (7, 3, 7, 3)$. La distribution \mathbf{x} s'obtient à partir de la distribution \mathbf{y} en reproduisant celle-ci deux fois à l'identique: on dit que \mathbf{x} est une *réplication* de \mathbf{y} . On convient habituellement qu'une telle opération ne modifie pas l'inégalité ce que l'on exprime au moyen de la condition ci-dessous.

PRINCIPE DES POPULATIONS (PP). L'inégalité n'est pas modifiée par une réplication des revenus.

Aussi naturelles paraissent-elles, les deux conditions précédentes ne sont toutefois pas spécifiques à la mesure de l'inégalité. L'idée d'inégalité – ou plus exactement de plus ou moins grande inégalité – est étroitement liée à la notion de *transfert progressif*. Nous dirons que la distribution \mathbf{x} résulte de la distribution \mathbf{y} au moyen d'un transfert progressif, s'il existe deux individus i, j et un montant de revenu Δ tels que:

$$(1a) \quad x_h = y_h, \text{ pour tout } h \neq i, j;$$

$$(1b) \quad x_i = y_i + \Delta; \quad x_j = y_j - \Delta;$$

³ Il s'agit de la distributions des revenus après taxation et transferts des ménages corrigés de la taille familiale selon la formule y/\sqrt{m} , où y et m sont respectivement le revenu et le nombre de personnes dans le ménage.

$$(1c) \quad 0 < \Delta \leq (y_j - y_i)/2.$$

Le transfert progressif consiste à prendre du revenu à un individu pour le donner à un individu moins riche en veillant à ce que l'individu initialement défavorisé ne devienne pas plus riche après transfert que l'individu initialement favorisé. Le cas limite est celui où les deux individus impliqués dans le transfert se retrouvent dans la même situation: leurs revenus sont égaux. Ainsi, la distribution $\mathbf{x} = (1, 5, 6, 9)$ s'obtient-elle à partir de la distribution $\mathbf{y} = (1, 4, 7, 9)$ au moyen d'un transfert progressif impliquant les individus 2 et 3. Si l'on considère qu'une telle opération réduit l'inégalité, alors on doit souscrire à la condition ci-dessous.

PRINCIPE DES TRANSFERTS (PT). Un transfert progressif réduit l'inégalité des revenus.

Les trois conditions précédentes supposent implicitement que les distributions ont même moyenne. Une permutation laisse la somme des revenus inchangée ainsi que la taille de la population, de même qu'un transfert progressif dans la mesure où ce qui est pris à l'individu riche est donné à l'individu pauvre. Si la réplification modifie bien la taille de la population, par contre elle ne change pas la moyenne de la distribution. La reconnaissance du fait que les distributions peuvent avoir des moyennes distinctes est traditionnellement prise en compte par l'idée que ce sont les *parts* du revenu total détenus par les individus qui importent et non le revenu en lui-même. Implicitement ceci revient à imposer la condition suivante.

INVARIANCE À LA MULTIPLICATION (IM). L'inégalité n'est pas modifiée si on augmente ou si on diminue tous les revenus dans la même proportion.

On pourrait à l'inverse à la suite de Kolm (1976) considérer que ce sont plutôt des variations de même montant absolu qui laissent l'inégalité inchangée.

INVARIANCE À LA TRANSLATION (IT). L'inégalité n'est pas modifiée si on augmente ou si on diminue tous les revenus d'un même montant.

Enfin il est habituel d'imposer la condition suivante qui revient à normaliser les indices d'inégalité.

NORMALISATION (N). L'inégalité est nulle lorsque tous les revenus sont égaux.

On qualifie d'indices d'*inégalité relative* les indicateurs vérifiant les conditions N, S, PP, PT et IM. Si on substitue la condition IT à la condition IM dans la liste précédente, alors on obtient les indices d'*inégalité absolue*.⁴ Tous indicateurs d'inégalité introduits plus haut vérifient les conditions S et PP. La variance, le coefficient de Gini ainsi que les deux indices de Theil traduisent une diminution de l'inégalité suite à un transfert progressif et satisfont donc à la condition PT. Un transfert progressif entraîne une diminution du rapport interdécile uniquement dans le cas où le bénéficiaire du transfert appartient au premier décile et/ou le donateur appartient au dernier décile. Le rapport interdécile, le coefficient de Gini et les deux indices de Theil sont des indices d'inégalité relative, alors que la variance est un indice d'inégalité absolue.

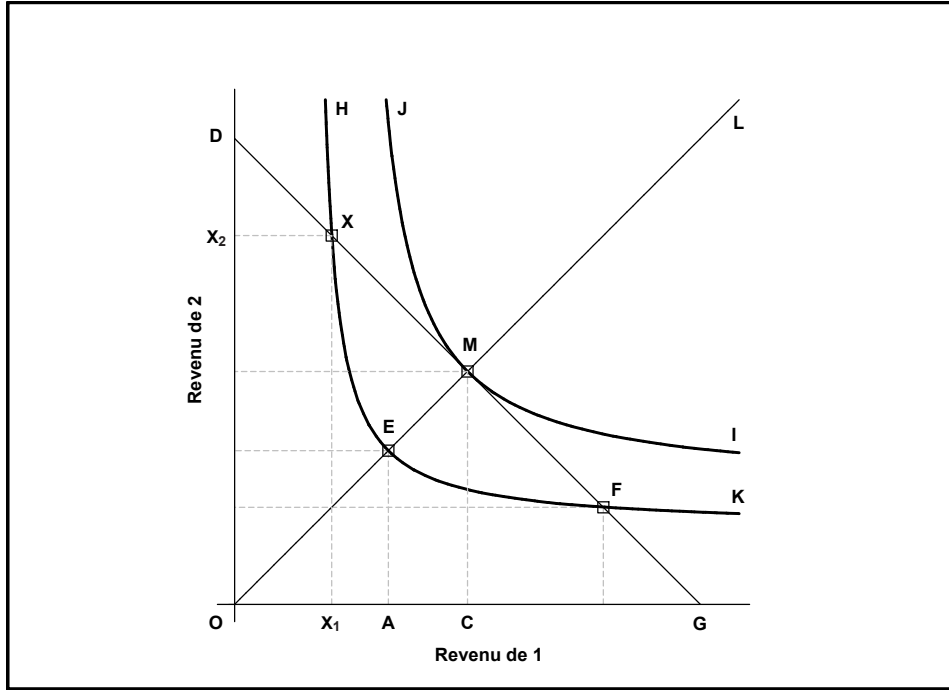
5. L'Approche Éthique de l'Inégalité

La discussion précédente montre que l'appréciation de l'inégalité est un exercice normatif qui repose sur des jugements de valeurs. À la suite de Kolm (1969), on s'est orienté vers

⁴ La condition IT combinée avec la condition PT implique que l'inégalité s'accroît lorsque tous les revenus augmentent dans la même proportion. C'est du reste ce constat qui est à l'origine de la suggestion de Kolm (1976) de substituer à la notion d'inégalité relative celle d'inégalité absolue.

une approche indirecte consistant à déduire l'indicateur d'inégalité d'une *fonction de bien-être social*. Soit $W_u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n u(x_i)$ le bien-être que la société retire de la distribution $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. La fonction de bien-être social W_u résume la manière dont un observateur bienveillant évalue la distribution \mathbf{x} . On assimile communément la fonction u à une fonction

Figure 2: Construction de l'Équivalent Égal



d'utilité: $u(x_i)$ peut s'interpréter comme le bien-être de l'individu i dans la situation \mathbf{x} tel qu'il est perçu par l'observateur bienveillant.⁵ Ce dernier est une construction de l'esprit dont la raison d'être est de réunir ce qu'il y a de commun en chacun de nous quant à la manière dont nous apprécions le bien-être social. On convient traditionnellement que le bien-être de la société augmente avec le revenu de ses membres ce qui équivaut à poser que la fonction u est strictement croissante. On suppose encore que l'observateur bienveillant a de l'aversion pour l'inégalité ce qui se traduit par le fait qu'un transfert progressif a pour effet d'augmenter le bien-être social, ce que garantit la concavité de u . L'*équivalent égal* de la distribution \mathbf{x} – noté $E_u(\mathbf{x})$ – représente le revenu qu'il faudrait donner à chacun de ses membres pour que la société atteigne le même niveau de bien-être que dans l'état \mathbf{x} . Formellement, on a

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n u(x_i) = nu(E_u(\mathbf{x})),$$

d'où on tire l'expression de l'équivalent égal

$$(3) \quad E_u(\mathbf{x}) = u^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u(x_i)\right),$$

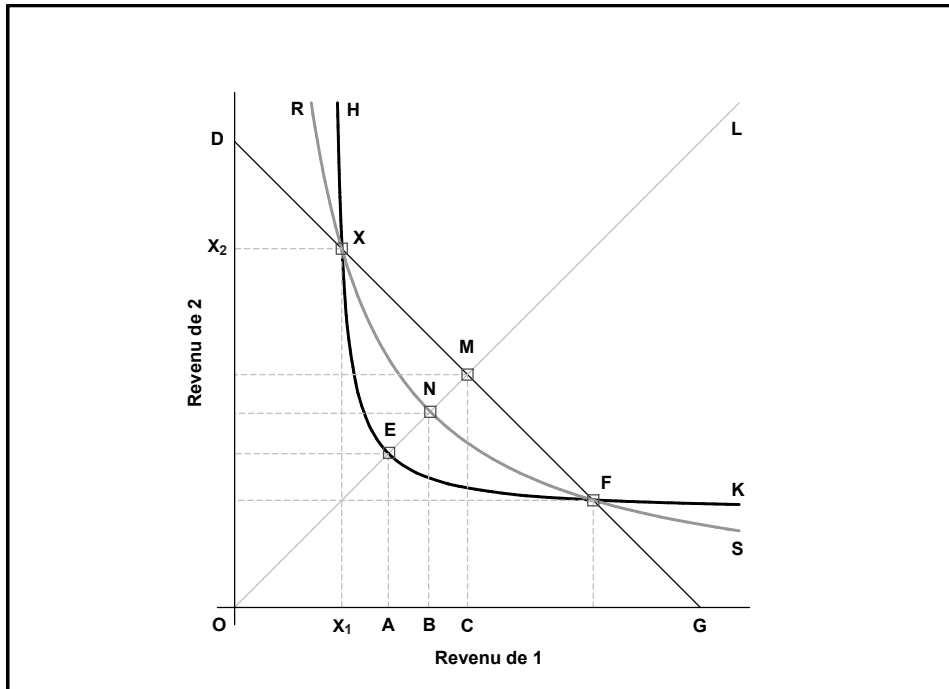
où u^{-1} est l'inverse de la fonction d'utilité u . La Figure 2 illustre la construction de l'équivalent égal pour la distribution $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (1.25, 4.75)$ et la fonction d'utilité $u(s) = -1/s$. Le

⁵ Il serait plus juste d'interpréter la fonction u comme une *norme sociale* représentant les valeurs communes qui s'imposent aux différents membres de la société.

segment DG représente l'ensemble des distributions dont la somme des revenus est égale à celle de la distribution \mathbf{x} . La courbe d'indifférence sociale HK est constituée par l'ensemble des distributions qui engendrent le même bien-être social que la distribution \mathbf{x} représentée par le point X. Le maximum de bien-être pour la société – correspondant au point M – est atteint lorsque chaque individu reçoit la moyenne de la distribution $\mu(\mathbf{x})$. On vérifie que l'équivalent égal $E_u(\mathbf{x})$ mesuré par la longueur du segment OA est inférieur à la moyenne des revenus $\mu(\mathbf{x})$ correspondant au segment OC. On peut montrer que $E_u(\mathbf{x}) \leq \mu(\mathbf{x})$, quelque soit \mathbf{x} , dès lors que u est concave. La différence $I_u^A(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - E_u(\mathbf{x})$ – égale au segment AC – représente la perte sociale occasionnée par l'inégalité. En d'autres termes, c'est le revenu moyen que la société aurait pu économiser si les revenus avaient été également distribués entre ses membres. Si on rapporte la perte moyenne au revenu moyen, alors on obtient la part du revenu total $I_u^R(\mathbf{x}) = 1 - (E_u(\mathbf{x})/\mu(\mathbf{x}))$, que la réalisation de l'égalité aurait permis d'économiser.

D'une certaine manière I_u^A et I_u^R peuvent s'interpréter comme des mesures de l'aversion pour l'inégalité de l'observateur bienveillant. Pour une distribution inégale \mathbf{x} donnée, les quantités I_u^A et I_u^R augmentent avec la concavité de la fonction u . Ceci est illustré dans la Figure 3 pour les fonctions d'utilité u et v où u est plus concave que v .⁶ Les courbes d'indifférence sociale correspondant aux fonctions d'utilité u et v et passant par le point X sont notées HK et RS, respectivement. On vérifie graphiquement que $E_u(\mathbf{x}) < E_v(\mathbf{x})$, ce qui garantit que $I_u^A(\mathbf{x}) > I_v^A(\mathbf{x})$ et $I_u^R(\mathbf{x}) > I_v^R(\mathbf{x})$.

Figure 3: Équivalents Égaux pour u et v



Par construction I_u^A et I_u^R vérifient les conditions N, S et PP, de même que la condition PT dès lors que la fonction d'utilité u est concave. Par contre I_u^A et I_u^R ne peuvent pas être considérés comme des indices d'inégalité – relative ou absolue – dans la mesure où rien ne permet d'affirmer qu'ils vérifient l'une ou l'autre des conditions IM et IT. On montre (Kolm

⁶ La fonction d'utilité u est plus concave que la fonction d'utilité v si la fonction composée $u(v^{-1})$ est concave.

(1976), Atkinson (1970), Ebert (1988)) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que I_u^R vérifie la condition IM est que la fonction d'utilité ait la forme

$$(4) \quad u(s) = \begin{cases} \frac{s^{1-\epsilon}}{1-\epsilon}, & 0 \leq \epsilon \neq 1 \\ \ln s, & \epsilon = 1, \end{cases}$$

ce qui, en reportant dans la définition de I_u^R , donne la famille des indices d'inégalité dite d'Atkinson-Kolm-Sen (AKS)

$$(5) \quad I_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\mu(\mathbf{x})} \right)^{1-\epsilon} \right)^{\frac{1}{1-\epsilon}}, & 0 \leq \epsilon \neq 1 \\ 1 - \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\mu(\mathbf{x})} \right)^{\frac{1}{n}}, & \epsilon = 1. \end{cases}$$

Le paramètre ϵ représente le degré d'aversion pour l'inégalité des fonctions d'utilité AKS. Lorsque $\epsilon = 0$, il n'y a pas d'aversion pour l'inégalité: la manière dont les revenus sont distribués n'importe pas et $I_\epsilon(\mathbf{x}) = 0$, quelle que soit la distribution \mathbf{x} . Lorsque $\epsilon = \infty$, l'aversion pour l'inégalité est maximale et seule importe la situation de l'individu le plus pauvre: $I_\epsilon(\mathbf{x}) = 1 - (\min\{x_i\}/\mu(\mathbf{x}))$.

De même pour que I_u^A puisse être considéré comme un indicateur d'inégalité absolue, il faut et il suffit que la fonction d'utilité soit de type exponentiel, soit

$$(6) \quad u(s) = \begin{cases} 1 - e^{-\eta s}, & 0 < \eta, \\ s, & \eta = 0, \end{cases}$$

(Kolm (1976), Ebert (1988)) ce qui, en reportant dans la définition de I_u^A , donne la famille des indices d'inégalité dite de Kolm-Sen (KP)

$$(7) \quad I_\eta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\eta[\mu(\mathbf{x})-x_i]} \right)^{-\frac{1}{\eta}}, & 0 < \eta, \\ 0, & \eta = 0. \end{cases}$$

Le paramètre η mesure le degré d'aversion pour l'inégalité des fonctions d'utilité KP. Lorsque $\eta = 0$, on obtient $I_\eta(\mathbf{x}) = 0$: la manière dont les revenus sont distribués n'importe pas. À l'inverse, $\eta = \infty$ traduit une aversion extrême pour l'inégalité, auquel cas seule la situation de l'individu le plus défavorisé est prise en compte et $I_\eta(\mathbf{x}) = 1 - (\min\{x_i\}/\mu(\mathbf{x}))$.⁷ Le Tableau 2 indique le degré d'inégalité dans nos sept pays mesurée à partir des indices AKS et KP pour des valeurs particulières de l'aversion pour l'inégalité.

6. Le Critère de Lorenz

Les Tableaux 1 et 2 montrent que le diagnostic en matière d'inégalité dépend largement du choix de l'indice retenu et donc des jugements de valeurs qu'ils contiennent. Le fait que l'on

⁷ La fonction de bien-être social que nous avons retenue est une spécification parmi d'autres et le principe de construction des indicateurs précédents peut s'appliquer à d'autres formes fonctionnelles. Ainsi il est possible de construire des généralisations du coefficient de Gini prenant en compte la plus ou moins grande aversion pour l'inégalité de l'observateur bienveillant (Donaldson and Weymark (1980)).

Table 2: Inégalité dans 7 Pays selon I_ϵ et I_η

PAYS	ϵ			η		
	0.5	2.0	3.5	.0002	.0005	.0008
1. Allemagne	.05047	.20221	.35669	.25974	.44635	.54572
2. Canada	.06373	.25205	.42697	.33808	.52501	.61409
3. Royaume-Uni	.07959	.27937	.42433	.34257	.49704	.57422
4. États-Unis	.09945	.37117	.59694	.46477	.64467	.72258
5. Suède	.04428	.17978	.33096	.22435	.41010	.51975
6. Norvège	.04086	.16372	.29848	.25505	.45165	.55622
7. Finlande	.04167	.15547	.25480	.20510	.35010	.43025

adhère aux conditions qui sous-tendent les indices AKS ou KP par exemple ne suffit pas à éliminer tout désaccord. Ainsi, suivant le degré d'aversion pour l'inégalité, un pays peut être considéré comme plus inégal ou moins inégal qu'un autre.

Plutôt que de nier la possibilité d'opinions antagonistes, ne peut-on au contraire reconnaître cette diversité? Une manière naturelle de procéder serait de déclarer qu'une distribution est moins inégale qu'une autre si *tous* les indices d'inégalité vérifiant un certain nombre de conditions minimales concluent en ce sens. Le classement des distributions résultant de cette approche en terme de consensus – ou encore de dominance – va naturellement dépendre de l'ensemble des indices retenu. Par exemple, on peut choisir la classe des indices d'inégalité relative vérifiant les conditions S, PP, PT et IM, que nous avons discutées plus haut. Si on note \mathcal{J}^R cette classe, alors la recherche du consensus consiste à poser que la distribution \mathbf{x} est moins inégale au sens de l'unanimité au sein de cette classe si

$$(8) \quad I(\mathbf{x}) \leq I(\mathbf{y}), \text{ pour tout } I \in \mathcal{J}^R.$$

Par définition on ne pourra jamais trouver deux indices d'inégalité relative qui classeront de manière opposée les distributions \mathbf{x} et \mathbf{y} . Mais ce consensus a un prix: le classement obtenu est *partiel* et dans certains cas – précisément ceux où il n'y a pas unanimité de points de vue – il ne sera pas possible de conclure dans un sens ou dans l'autre. À cette difficulté s'ajoute le fait que la condition (8) est impossible à vérifier en pratique étant donné que la classe \mathcal{J}^R comprend une infinité d'éléments.⁸

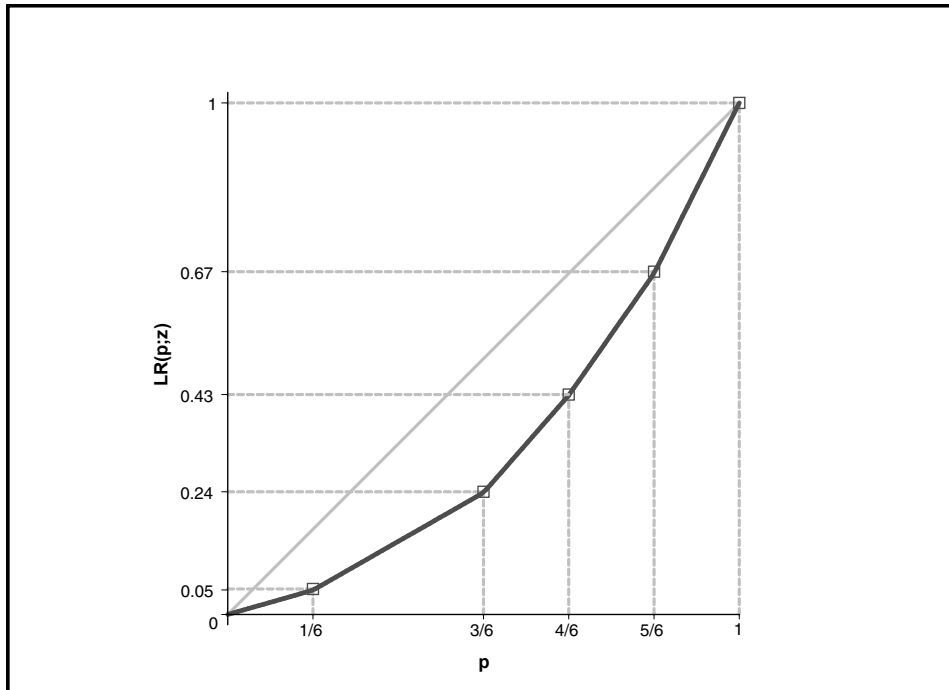
Le *critère de Lorenz relatif* permet de vérifier s'il y a unanimité de points de vue en ce qui concerne le classement de deux distributions en terme d'inégalité relative. La *courbe de Lorenz relative* $LR(p; \mathbf{x})$ de la distribution \mathbf{x} indique pour chaque fraction des $p \times 100\%$ individus les plus pauvres la part du revenu total qu'elle détient.⁹ Nous avons représenté dans la Figure 4 la courbe de Lorenz relative de la distribution $\mathbf{x} = (1, 2, 2, 4, 5, 7)$. On dit que la distribution \mathbf{x} domine la distribution \mathbf{y} au sens du critère de Lorenz relatif si la courbe de Lorenz relatif de la distribution \mathbf{x} est nulle part située en-dessous de celle de la distribution \mathbf{y} , ce qui s'exprime formellement par

$$(9) \quad LR(p; \mathbf{x}) \geq LR(p; \mathbf{y}), \text{ pour tout } 0 \leq p \leq 1.$$

⁸ Ceci se comprend aisément dès lors qu'on réalise que, si l'indice I appartient à la classe \mathcal{J}^R , alors il en est de même pour l'indice $f(I)$, où f est strictement croissante.

⁹ Formellement, la courbe de Lorenz (relative) s'obtient en intégrant la fonction quantile préalablement divisée par le revenu moyen, soit donc $LR(p; \mathbf{x}) = \int_0^p (Q(q; \mathbf{x})/\mu(\mathbf{x})) dq$, avec $0 \leq p \leq 1$.

Figure 4: Courbe de Lorenz Relative



On peut montrer que les conditions (8) et (9) sont équivalentes: on est donc assuré que, si la distribution \mathbf{x} domine la distribution \mathbf{y} au sens du critère de Lorenz relatif, alors l'inégalité en \mathbf{x} ne sera jamais supérieure à l'inégalité en \mathbf{y} , et ce quelque soit l'indice d'inégalité relative retenu. Dans le cas contraire où les courbes de Lorenz relatives se coupent, on pourra toujours

Table 3: Classement selon le Critère de Lorenz Relatif

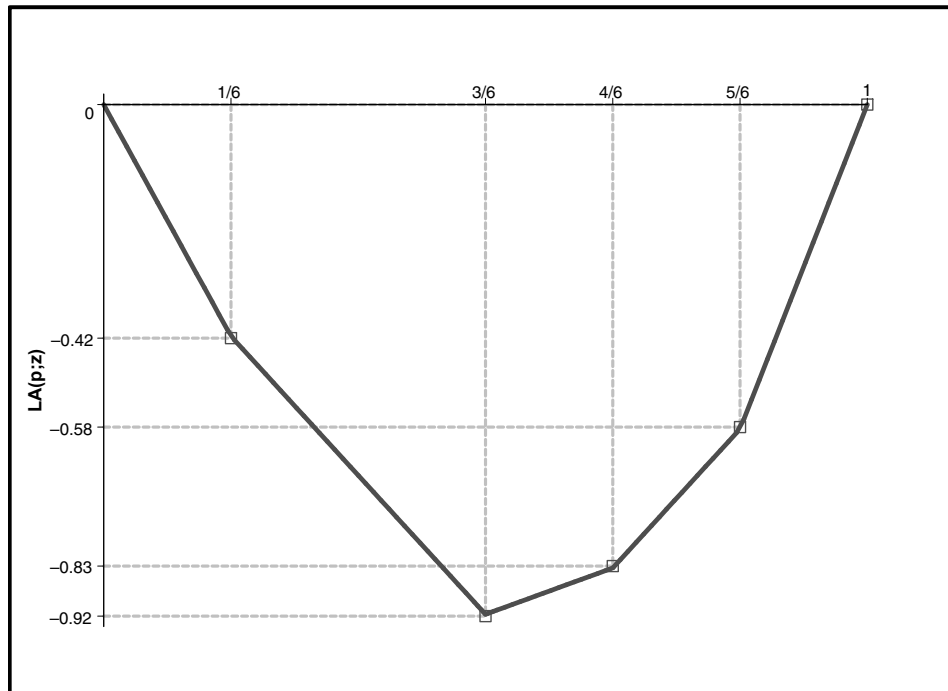
PAYS i	PAYS j					
	2	3	4	5	6	7
1. Allemagne	1	1	1	0	0	0
2. Canada		#	1	#	0	0
3. Royaume-Uni			1	0	0	0
4. États-Unis				0	0	0
5. Suède					0	0
6. Norvège						#
7. Finlande						

trouver deux indices d'inégalité relative, qui classeront les distributions \mathbf{x} et \mathbf{y} en sens opposé. L'application du critère de Lorenz relatif à la comparaison de nos sept pays donne le classement (partiel) indiqué dans le Tableau 3. La présence du symbole "1" signifie que le pays i domine le pays j et celle du symbole "0" que c'est le contraire. Nous utilisons le symbole "#" pour indiquer que les pays i et j ne sont pas comparables. Il ressort du Tableau 3 que les États-Unis sont dominés par tous les autres pays. Il s'ensuit que, quelque soit l'indice d'inégalité relative choisi, l'inégalité aux États-Unis ne pourra en aucun cas être inférieure à l'inégalité dans les autres pays et dans certains cas elle sera supérieure. Par contre le critère de Lorenz relatif ne permet pas de trancher dans le cas du Canada et du Royaume-Uni ou encore dans le cas de la Norvège et de la Finlande. Il sera donc toujours possible de trouver des indices

d'inégalité relative classant de manière opposée le Canada et le Royaume-Uni ou la Norvège et la Finlande. On vérifie par exemple en se reportant au Tableau 2 que le Canada est moins inégal que le Royaume-Uni lorsque $\epsilon = 2.0$ alors qu'on obtient la situation inverse lorsque $\epsilon = 3.5$. De même, la Norvège est-elle moins inégale que la Finlande pour $\epsilon = 0.5$ mais plus inégale que cette dernière dès lors que $\epsilon = 2.0$.

L'approche précédente se transpose sans difficulté au cas des indices d'inégalité absolue préconisés par Kolm (1976). La courbe de Lorenz absolue $LA(p; \mathbf{x})$ de la distribution \mathbf{x}

Figure 5: Courbe de Lorenz Absolue



indique le revenu qu'il faudrait en moyenne pour garantir aux $p \times 100\%$ individus les plus pauvres le revenu moyen de la société.¹⁰ La Figure 5 illustre la construction de la courbe de Lorenz absolue dans le cas de la distribution $\mathbf{x} = (1, 2, 2, 4, 5, 7)$. On peut montrer alors que le classement des distributions résultant de l'unanimité au sein de la classe \mathcal{J}^A des indices d'inégalité absolue est identique au classement engendré par le critère de Lorenz absolu défini par

$$(10) \quad LA(p; \mathbf{x}) \geq LA(p; \mathbf{y}), \text{ pour tout } 0 \leq p \leq 1.$$

Le classement de nos sept pays par le critère de Lorenz absolu est indiqué dans le Tableau 4. La substitution du critère de Lorenz absolu au critère de Lorenz relatif modifie le classement des pays même si ce changement n'est pas dramatique. Ainsi, les États-Unis sont toujours dominés par tous les autres pays alors que que la Suède et la Finlande font toujours partie des pays les plus égalitaires. Il faut remarquer l'ascension de l'Allemagne, qui domine maintenant la Norvège, cependant que le Canada et du Royaume-Uni ne sont toujours pas comparables. On vérifie ainsi dans le Tableau 2 que le Canada est moins inégal que le Royaume-Uni lorsque $\eta = 0.0002$ alors que la situation inverse prévaut lorsque $\epsilon = 0.0005$.

¹⁰ La courbe de Lorenz absolue s'obtient en intégrant la fonction quantile à laquelle on a soustrait le revenu moyen, soit donc $LA(p; \mathbf{x}) = \int_0^p (Q(q; \mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x})) dq$, avec $0 \leq p \leq 1$.

Table 4: Classement selon le Critère de Lorenz Absolu

PAYS i	PAYS j					
	2	3	4	5	6	7
1. Allemagne	1	1	1	0	1	0
2. Canada		#	1	0	0	0
3. Royaume-Uni			1	0	#	0
4. États-Unis				0	0	0
5. Suède					1	#
6. Norvège						0
7. Finlande						

7. La Décomposition de l'Inégalité

On est souvent amené à s'intéresser à la relation entre l'inégalité totale – celle qui a trait à la manière dont le revenu total est distribué entre tous les membres de la société – et l'inégalité entre les différents groupes constituant la société ou au sein de ces mêmes groupes. Par exemple, on souhaite connaître la part de l'inégalité des revenus du travail qui est imputable à l'inégalité des rémunérations entre hommes et femmes. Cette question est étroitement liée à la propriété de *cohérence en agrégation* (CA), qui requiert que l'inégalité dans l'ensemble de la population ne saurait diminuer suite à une augmentation de l'inégalité dans un des groupes. Cette condition est en fait violée par un grand nombre d'indices dont le coefficient de Gini. Supposons pour simplifier que la population totale soit partagée en deux groupes mutuellement exclusifs notés A et B comprenant respectivement n^A et n^B individus. Soit respectivement \mathbf{x}^A et \mathbf{x}^B les distributions des revenus des groupes A et B et soit $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^A; \mathbf{x}^B)$ la distribution pour l'ensemble de la population. Les revenus moyens des distributions \mathbf{x}^A et \mathbf{x}^B sont notées μ^A et μ^B . La propriété CA est en fait équivalente à la condition suivante.

DÉCOMPOSABILITÉ ADDITIVE EN GROUPES (DAG). Pour toute distribution $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^A; \mathbf{x}^B)$, on a

$$(11) \quad I(\mathbf{x}^A; \mathbf{x}^B) = w^A I(\mathbf{x}^A) + w^B I(\mathbf{x}^B) + I(\mu^A, \mu^B).$$

La condition DAG exprime le fait que l'inégalité totale est égale à la somme des inégalités dans les groupes $I(\mathbf{x}^A)$ et $I(\mathbf{x}^B)$ pondérées par les facteurs w^A et w^B dépendant uniquement des tailles et des moyennes respectives des sous-populations A et B , à laquelle s'ajoute l'inégalité entre les groupes $I(\mu^A, \mu^B)$. On montre alors (Shorrocks (1980)) que les seuls indices d'inégalité vérifiant les conditions N, S, PP, PT, IM et DAG sont – à une constante multiplicative positive près – identiques au *coefficient d'entropie généralisé* défini par:

$$(12) \quad I_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{n\alpha(\alpha-1)} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{x_i}{\mu(\mathbf{x})} \right)^\alpha - 1 \right],$$

où α est un nombre réel.

Une seconde application de la mesure des inégalités porte sur la manière dont les différentes composantes du revenu contribuent à l'inégalité du revenu total. Par exemple, on souhaiterait savoir qu'elle va être l'incidence sur l'inégalité du revenu total d'une modification particulière de la grille des salaires ou d'un changement de la fiscalité du rendement des actifs financiers. Supposons pour simplifier qu'il y ait seulement deux sources de revenus et soient x_i^1 et x_i^2 les

revenus que l'individu i retire des sources de revenu 1 et 2, respectivement. Les distributions des revenus provenant des sources 1 et 2 sont notées $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$ et $\mathbf{x}^2 = (x_1^2, \dots, x_n^2)$. La distribution du revenu total est alors $\mathbf{x} = \mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2$. Considérons un indice d'inégalité I et notons S^1 et S^2 les *contributions* respectives à l'inégalité du revenu total $I(\mathbf{x})$ des sources 1 et 2. Il paraît naturel de requérir que la somme des contributions épuise l'inégalité totale, ce qui équivaut à poser:

$$(13) \quad I(\mathbf{x}) = S^1 + S^2, \text{ pour toute distribution } \mathbf{x}.$$

Supposons maintenant que l'on assimile la contribution d'une source de revenu à la réduction d'inégalité du revenu total qui résulte de l'élimination de l'inégalité au sein de la source de revenu en question. Si on note $\bar{\mathbf{x}}^1$ et $\bar{\mathbf{x}}^2$ les distributions des sources 1 et 2 où tous les individus reçoivent le revenu moyen de la source, alors ceci s'écrit:

$$(14) \quad S^1 = I(\mathbf{x}) - I(\bar{\mathbf{x}}^1 + \mathbf{x}^2) \text{ et } S^2 = I(\mathbf{x}) - I(\mathbf{x}^1 + \bar{\mathbf{x}}^2).$$

Les deux conditions précédentes impliquent que l'indice d'inégalité doit posséder la propriété suivante.

DÉCOMPOSABILITÉ ADDITIVE EN SOURCES (DAS). Pour toute distribution $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1; \mathbf{x}^2)$, on a

$$(15) \quad I(\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2) = I(\bar{\mathbf{x}}^1 + \mathbf{x}^2) + I(\mathbf{x}^1 + \bar{\mathbf{x}}^2).$$

On montre alors (Shorrocks (1982)) qu'il n'existe pas d'indice d'inégalité vérifiant les conditions N, S, PT et DAS. Il résulte des propriétés de la *variance* que

$$(16) \quad V(\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2) = V(\mathbf{x}^1) + V(\mathbf{x}^2) + Cov(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2),$$

où $Cov(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ est la covariance des distributions \mathbf{x}^1 et \mathbf{x}^2 . On en déduit que, si les sources de revenus sont indépendantes, alors $Cov(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = 0$ et $V(\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2) = S^1 + S^2$, avec $S^1 = V(\mathbf{x}^1)$ et $S^2 = V(\mathbf{x}^2)$. La variance vérifie les conditions N, S, PT et DAS sous la réserve expresse que les différentes sources de revenu soient indépendantes, ce qui constitue dans la pratique une restriction très contraignante.

8. Développement Récents

On peut faire remonter à la fin des années 60-début des années 70 le naissance de la théorie moderne de la mesure de l'inégalité en économie normative avec les contributions de Kolm (1969), d'Atkinson (1970) et de Sen (1973). Les quarante dernières années ont été marquées par un certain nombre d'avancées dont le présent article donne un aperçu. La théorie de la mesure des inégalités n'en présente pas moins un certain nombre de limites dont des travaux plus récents se sont faits l'écho.

La première difficulté concerne le caractère difficilement irréductible du bien-être individuel au seul revenu de ce dernier. Nous avons insisté sur le fait que l'environnement familial – traditionnellement pris en compte au moyen d'échelles d'équivalence – joue un rôle important. En supposant que cette technique d'ajustement du revenu reflète correctement la manière dont le partage des ressources au sein du ménage affecte le niveau de vie de chacun de ses membres, il n'en demeure pas moins que certains facteurs ne sont pas pris en considération. Par exemple la santé de l'individu ou la proximité de biens publics sont autant de facteurs

qui contribuent au bien-être individuel (voir par exemple Gravel, Moyes, and Tarroux (2008)). Cette reconnaissance plaide pour une approche multidimensionnelle des inégalités où le revenu constitue une dimension essentielle mais parmi d'autres.

Une seconde difficulté tient au *principe des transferts*, qui traduit l'idée même de réduction des inégalités. Selon ce principe, toute redistribution d'un individu plus riche vers un individu plus pauvre réduit l'inégalité au sein de l'ensemble de la population, et ce quelles que soient les positions sur l'échelle des revenus des individus participant au transfert. Un certain nombre d'études à base de questionnaires ont montré que ce principe – considéré comme une propriété minimale pour un indicateur d'inégalité – était très loin de faire l'unanimité auprès des personnes interrogées (voir notamment Amiel and Cowell (1999)). Ce constat a conduit à proposer des conditions alternatives au principe des transferts plus aptes à faire l'objet d'un consensus et à examiner leurs implications pour la construction d'indices d'inégalité (voir par exemple Magdalou and Moyes (2009)).

References

- Amiel, Y. and Cowell, F. A. (1999). *Thinking About Inequality*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Atkinson, A. B. (1970). On the measurement of inequality. *Journal of Economic Theory*, **2**, 244–263.
- Donaldson, D. and Weymark, J. A. (1980). A single-parameter generalization of the Gini indices of inequality. *Journal of Economic Theory*, **22**, 67–86.
- Ebert, U. (1988). Measurement of inequality: An attempt at unification and generalization. *Social Choice and Welfare*, **5**, 59–81.
- Gravel, N., Moyes, P., and Tarroux, B. (2008). Robust international comparisons of distributions of disposable income and regional public goods. *Economica*. Published online DOI 10.1111/j.1468-0335.2008.00688.x.
- Kolm, S.-C. (1969). The optimal production of social justice. In J. Margolis and H. Guitton, editors, *Public Economics*, pages 145–200. Macmillan, London.
- Kolm, S.-C. (1976). Unequal inequalities I. *Journal of Economic Theory*, **12**, 416–442.
- Magdalou, B. and Moyes, P. (2009). Deprivation, welfare and inequality. *Social Choice and Welfare*, **32**, 253–273.
- Sen, A. K. (1973). *On Economic Inequality*. Clarendon Press, Oxford, first edition.
- Shorrocks, A. F. (1980). The class of additively decomposable inequality measures. *Econometrica*, **48**, 613–625.
- Shorrocks, A. F. (1982). Inequality decomposition by factors components. *Econometrica*, **50**, 193–211.

Cahiers du GREThA
Working papers of GREThA

GREThA UMR CNRS 5113

Université Montesquieu Bordeaux IV
Avenue Léon Duguit
33608 PESSAC - FRANCE
Tel : +33 (0)5.56.84.25.75
Fax : +33 (0)5.56.84.86.47

www.gretha.fr

Cahiers du GREThA (derniers numéros)

- 2008-19 : MALFAIT Jean-Jacques, PAJOT Guillaume, *Séquestration des flux de carbone forestier : rotations des peuplements, prise en compte des produits bois et optimisation des stocks de carbone*
- 2008-20 : LAYAN Jean-Bernard, LUNG Yannick, *Attractivité et agglomération de l'industrie automobile au Maroc et en Tunisie : une analyse comparative*
- 2008-21 : CABANNES Michel, *La place de la sphère résidentielle dans le développement territorial : Quelques éléments d'appréciations*
- 2008-22 : NICET-CHENAF Dalila, ROUGIER Eric, *Recent exports matter: export discoveries, FDI and Growth, an empirical assessment for MENA countries*
- 2008-23 : MAGDALOU Brice, MOYES Patrick, *Social Welfare, Inequality and Deprivation*
- 2008-24 : BERR Eric, *Le développement soutenable dans une perspective post keynésienne : retour aux sources de l'écodéveloppement*
- 2008-25 : BERROU Jean-Philippe, COMBARNOUS François, *Ties configuration in entrepreneurs' personal network and economic performances in African urban informal economy*
- 2008-26 : AMABLE Bruno, LUNG Yannick, *The European Socio-Economic Models of a Knowledge-based society. Main findings and conclusion*
- 2008-27 : MAROUANE Alaya, NICET-CHENAF Dalila, ROUGIER Eric, *The law of growth and attraction: an endogenous model of absorptive capacities, FDI and income for MENA countries*
- 2008-28 : OLTRA Vanessa, *Environmental innovation and industrial dynamics: the contributions of evolutionary economics*
- 2009-01 : MONTALBAN Matthieu, *L'influence de la financiarisation sur les modèles productifs dans l'industrie pharmaceutique : domination et contradictions de la conception du contrôle blockbuster*
- 2009-02 : CARAYOL Nicolas, LAHATTE Agenor, *Dominance relations and universities ranking*
- 2009-03 : PETIT Emmanuel, *Emotions et décision économique dans le jeu de l'ultimatum*
- 2009-04 : BLANCHETON Bertrand, JEGOUREL Yves, *Les fonds souverains : un nouveau mode de régulation du capitalisme financier ?*
- 2009-05 : OLTRA Vanessa, KEMP René, DE VRIES Frans P., *Patents as a Measure for Eco-Innovation*
- 2009-06 : MOYES Patrick, *Mesurer les inégalités économiques*