



Groupe de Recherche en  
Économie Théorique et Appliquée

---

## Le nouveau modèle keynésien : une interprétation d'«Interest and Prices» de Michael Woodford

***Martin Zumpe***

*GREThA, CNRS, UMR 5113*

*Université de Bordeaux*

[\*martin.zumpe@u-bordeaux.fr\*](mailto:martin.zumpe@u-bordeaux.fr)

***Cahiers du GREThA***

**n° 2015-30**

**octobre**

---

**GREThA UMR CNRS 5113**

Université de Bordeaux

Avenue Léon Duguit - 33608 PESSAC - FRANCE

Tel : +33 (0)5.56.84.25.75 - Fax : +33 (0)5.56.84.86.47 - [www.gretha.fr](http://www.gretha.fr)

---

**Le nouveau modèle keynésien : une interprétation d'«Interest and Prices»  
de Michael Woodford**

**Résumé**

*Depuis une quinzaine d'années, le « nouveau modèle keynésien » occupe une place centrale dans l'analyse macro-monnaire. La présentation la plus élégante et la plus générale de ce modèle se trouve dans le traité « Interest and Prices » de Michael Woodford (2003). Cet ouvrage est toutefois assez difficile d'accès pour le lecteur à cause d'une structure non-linéaire et quelque peu éclatée des développements. Un autre obstacle réside dans le caractère assez sommaire des résolutions analytiques. Pour remédier à ces difficultés, ce papier propose une dérivation unifiée, complète et détaillée du modèle de base de Woodford. Au-delà d'une simple reconstitution du travail analytique de Woodford, le papier examine le fonctionnement du modèle et met en évidence ses hypothèses implicites. Il démontre également l'absence d'épargne nationale dans le modèle, et propose une formalisation inédite du mécanisme de transmission de la politique monétaire.*

**Mots-clés :** nouveau modèle keynésien – modélisation dynamique stochastique d'équilibre général – anticipations rationnelles – règles de politique monétaire

**The New Keynesian Model: an Interpretation of Michael Woodford's  
"Interest and Prices"**

**Abstract**

*Over the past fifteen years, the "New Keynesian Model" has occupied a central place in macro-monetary economics. Michael Woodford's "Interest and Prices" (2003) provides the smartest and most general presentation of this model. However, due to its non-linear and somehow fragmented structure, comprehension of this work may be challenging for readers. Sketchiness of analytical resolutions is another obstacle to full understanding. In order to cope with these difficulties, this paper suggests a unified, exhaustive and detailed derivation of Woodford's basic model. Beyond a mere re-examination of Woodford's analytical work, the paper investigates the functioning of the model and brings to light its implicit assumptions. It also shows the absence of national savings in the model, and provides an unpublished formal expression of the transmission mechanism of monetary policy.*

**Keywords:** new Keynesian model – dynamic stochastic equilibrium modelling – rational expectations – monetary policy

**JEL:** E12, E32, D84, E52

<p>Reference to this paper: ZUMPE Martin (2015) <b>Le nouveau modèle keynésien : une interprétation d'«Interest and Prices» de Michael Woodford</b>, <i>Cahiers du GREThA</i>, n°2015-30.</p>
---

<p><a href="http://ideas.repec.org/p/grt/wpegrt/2015-30.html">http://ideas.repec.org/p/grt/wpegrt/2015-30.html</a>.</p>
---

# 1 Introduction

Les quinze dernières années de l'analyse macroéconomique ont été dominées par un modèle dont l'importance ressort des différentes appellations, très évocatrices, sous lesquelles il est connu : *The New Keynesian Framework* (Galí 2008) et *A New Keynesian Model* (Walsh 2003) sous-entendent que le modèle résume les positions théoriques des Nouveaux Keynésiens ; *the Canonical Model* (Galí & Gertler 2007) lui confère le statut du modèle de référence autour duquel gravitent de nombreux autres modèles appartenant à la même famille ; *The New Neoclassical Synthesis* (Goodfriend & King 1997) suggère un statut comparable à celui de la synthèse néoclassique des années 1960.

Ce modèle dynamique stochastique d'équilibre général est basé sur des fondements microéconomiques assez complets (cf. par exemple McCallum & Nelson (1999), Woodford (2003), Walsh (2003) ou Galí (2008)). Dans la mesure où l'appellation « nouveau modèle keynésien » est de loin la plus utilisée, je l'utiliserai dans le présent document, même si cette appellation pose question. Ainsi Galí & Gertler (2007) font remarquer que l'utilisation de l'adjectif « keynésien » a tendance à faire oublier la contribution de la théorie du cycle réel dans la genèse du modèle. On pourrait dire la même chose sur la contribution des auteurs monétaristes, notamment celle d'Edward Nelson et Bennett McCallum.

L'idée d'une filiation « keynésienne » du modèle est d'autant plus discutable qu'une partie de ses propriétés fondamentales ne correspondent guère à une vision keynésienne du fonctionnement de l'économie : le chômage est toujours volontaire et le cycle des affaires est généré par des chocs réels, i.e. par des fluctuations du niveau naturel de la production.

L'évocation d'une logique de synthèse (Goodfriend & King 1997, p. 231 - 233) semble plus judicieuse, car le modèle associe à ces propriétés d'inspiration néoclassique des éléments qui s'inscrivent pleinement dans la tradition keynésienne : les rigidités nominales y occupent une place centrale et la politique monétaire est capable d'influencer l'évolution des variables réelles. Toutefois, l'appellation retenue par Goodfriend & King (1997) « The New Neoclassical Synthesis » ne fait pas explicitement référence à cet héritage keynésien, et elle ne s'est pas imposée dans la littérature.

Le caractère synthétique évoqué par Goodfriend et King a sans doute contribué au succès du nouveau modèle keynésien : ses fondements microéconomiques (comportement d'optimisation et anticipations rationnelles) le rendent familier, et probablement acceptable, aux yeux des Nouveaux Classiques ; le rôle central accordé à la rigidité des prix favorise à son tour l'adhésion des Nouveaux Keynésiens.

Une deuxième raison de son succès réside dans sa faculté à illustrer et reproduire des intuitions fondamentales de la macroéconomie moderne avec une remarquable économie de moyens. Dans son expression la plus simple, le modèle ne comporte que trois équations linéaires, qui constituent un cadre permettant d'étudier le rôle crucial des rigidités nominales et des anticipations dans le fonctionnement de l'économie ainsi que la capacité des autorités monétaires d'influencer l'économie réelle en manipulant le taux d'intérêt nominal (Clarida et al. 1999). En effet, le modèle existe sous deux formes : une forme complète non-linéaire et une forme linéarisée, obtenue par log-linéarisation autour d'un état stationnaire *déterministe* (au sens de l'anglais *deterministic*, i.e. dépourvu d'éléments stochastiques), qui se manipule assez facilement.

Ce papier présente et discute d'abord la dérivation de cette version linéarisée du modèle à partir de ces fondements microéconomiques. Il s'agit d'explicitier les hypothèses sur lesquelles le modèle repose et de mettre en lumière sa structure et son fonctionnement. La fin du présent document s'intéresse plus particulièrement à la manière dont les fluctuations de l'économie sont appréhendées dans le modèle et aux mécanismes qui permettent à la politique monétaire d'y faire face. Cette présentation du modèle et de son fonctionnement se veut la plus complète, la

plus détaillée et la plus technique possible. Elle est essentiellement basée sur Woodford (2003), complétée par les présentations de Preston (2005) et de Galí (2008). L'ouvrage de Woodford séduit effectivement par son caractère universel : son analyse dépasse le caractère particulier des contributions de Walsh (2003) et Galí (2008), qui sont basées pour l'essentiel sur une fonction d'utilité spécifique, car les analyses de Woodford sont valables pour une famille entière de fonctions d'utilité ; contrairement à Preston qui suppose des marchés financiers incomplets, Woodford modélise dans un contexte de marchés financiers complets.

Le cadre retenu dans la présente étude - une *économie de production sans frictions monétaires* - correspond au *modèle de base* de Woodford (2003, p. 238), i.e. à celui du quatrième chapitre de ce traité. Pour caractériser une économie sans frictions monétaires, la littérature anglophone retient l'expression *cashless economy*. L'utilisation de l'adjectif « cashless » ne traduit pas l'inexistence de la monnaie dans une telle économie, mais le fait que les ménages n'ont pas besoin de monnaie pour fluidifier les transactions. Il n'existe donc pas de demande de monnaie à cette fin. Le rôle principal de la monnaie dans une telle économie est celui d'unité de compte. Une différence subtile entre le modèle présenté ici et le modèle de base de Woodford concerne le rôle du gouvernement : la présente exposition se situe dans un cadre marqué par l'absence de biens et services produits par le gouvernement. Le choix de ce cadre est peu restrictif : l'introduction ultérieure d'une production gouvernementale ne modifie guère le comportement du modèle (Woodford 2003, p. 73 -74). Ce choix facilitera la présentation de la dérivation de la version linéarisée du nouveau modèle keynésien.

L'ouvrage de Woodford est difficile d'accès pour le lecteur de part ses développements peu linéaires. Une difficulté majeure réside dans l'absence d'une dérivation explicite du modèle de base. En effet, Woodford propose dans le deuxième chapitre de son ouvrage la dérivation d'un modèle linéarisé qui représente une *économie de dotation sans frictions monétaires* ; dans son troisième chapitre, il dérive un modèle décrivant une *économie de production avec frictions monétaires*. On remarque qu'aucune de ces deux versions du nouveau modèle keynésien ne correspond vraiment au cadre du modèle de base, i.e. celui d'une *économie de production sans frictions monétaires*.

Le caractère parfois très sommaire des développements analytiques - l'auteur passe d'une équation à l'autre sans expliciter de nombreuses manipulations intermédiaires - représente également un inconvénient. Ce procédé traduit de toute évidence l'extraordinaire maîtrise de Woodford et sa connaissance parfaite des méthodes de résolutions mobilisées par la macroéconomie moderne ; il peut toutefois poser un sérieux problème de compréhension pour le lecteur.

Face à ces deux difficultés, j'ai adopté la démarche suivante : j'ai assemblé des éléments trouvés dans le chapitre 2 et 3 de l'ouvrage de Woodford pour identifier les fondements microéconomiques qui correspondent au contexte du modèle de base : une *économie de production sans frictions monétaires* ; ensuite, j'ai reconstitué les étapes intermédiaires nécessaires à la dérivation d'un modèle linéarisé à partir de ces fondements. Le résultat est un cadre analytique cohérent, détaillé et complet qui se veut compréhensible sans lectures complémentaires. Le fait de disposer d'un tel cadre présente l'avantage de rendre explicite un certain nombre d'hypothèses implicites, ce qui favorisera la compréhension du fonctionnement du modèle.

Les sections 2 et 3 décrivent comment le nouveau modèle keynésien linéarisé peut être dérivé à partir de ses fondements microéconomiques : dans cette optique, les sous-sections 2.1 et 2.2 présentent les comportements d'optimisation des agents privés de l'économie (les ménages et les firmes) ; la sous-section 2.3 expose les politiques économiques mises en œuvre par les autorités monétaires et budgétaires ; l'équilibre en anticipations rationnelles de l'économie et les conditions d'apurement associées sont l'objet de la sous-section 3.1 ; la suite de la section 3 montre comment on peut trouver, à partir de cet équilibre, la version linéarisée du modèle à l'aide de techniques de linéarisation autour d'un état stationnaire.

La section 4 se concentre sur des éléments étroitement liés au rôle et au fonctionnement de la politique monétaire. Ainsi, la sous-section 4.1 fait l'inventaire des chocs susceptibles de provoquer des déviations de l'économie par rapport à l'état stationnaire. L'existence de ces déviations pose la question de la capacité des autorités monétaires d'agir sur l'ampleur de celles-ci à des fins de stabilisation de l'économie. Dans cette perspective, la sous-section 4.2 examine le canal de transmission de la politique monétaire.

La section 5 conclut.

## 2 Comportements des agents

### 2.1 Optimisation intertemporelle du ménage

#### 2.1.1 Ménage représentatif

Dans la présentation du nouveau modèle keynésien de Woodford, l'économie est peuplée par un grand nombre de ménages identiques (Woodford 2003, p. 64). Pour caractériser les préférences et les comportements de ces ménages, Woodford fait appel à l'hypothèse d'un ménage représentatif. Il ne donne pourtant pas d'indications quant à la signification précise de cette hypothèse.

L'hypothèse de l'agent représentatif permet en effet plusieurs interprétations. Le cas le plus simple est celui où tous les agents sont parfaitement identiques ; comme tous les agents se comportent de la même manière, il suffit de décrire le comportement d'un d'entre eux - l'agent représentatif - pour savoir exactement comment se comportent les autres. Dans ce cas, les variables qui se réfèrent à l'agent représentatif, i.e. notamment celles qui se trouvent dans sa fonction d'utilité et dans sa contrainte budgétaire, sont des variables individuelles (sa consommation individuelle, ses revenus individuels etc). Les variables agrégées s'obtiennent alors en multipliant les variables individuelles par le nombre d'agents. Selon une deuxième interprétation, on peut considérer l'agent représentatif comme un agent fictif dont les décisions correspondent à l'agrégation des comportements des agents qui peuplent le modèle :

*"Consider the most favorable situation, that in which we can construct an individual whose utility-maximising choices correspond to the aggregate choices of the individual in the economy."* (Kirman 1992, p. 146)

Dans cette interprétation, les variables qui se réfèrent à l'agent représentatif ne peuvent être que des variables agrégées. Un cas particulier de cette dernière lecture peut être considéré comme une troisième interprétation de l'hypothèse de l'agent représentatif :

*"This assumption allows us to analyze each country's aggregate per capita consumption as if it were decided by a composite individual endowed with the economy's per capita economic resources."* (Obstfeld & Rogoff 1996, p. 292)

Les variables qui se réfèrent à l'agent représentatif sont toujours des variables agrégées, mais il s'agit cette fois-ci de variables *per capita*. De nouveau, on obtient les expressions habituelles des variables agrégées - i.e. des variables qui ne sont pas exprimées *per capita* - en multipliant les variables qui se réfèrent à l'agent représentatif par le nombre d'agents.

Dans le développement de son modèle, Woodford parle indistinctement du comportement « des ménages » et du comportement « du ménage représentatif ». Il s'agit là d'un indice que Woodford retient la première interprétation de l'agent représentatif, i.e. celle où la représentativité du ménage s'explique par le fait que tous les agents du modèle sont parfaitement identiques. Des éléments formalisés de la présentation du modèle de Woodford confirment cette vision (cf. annexe A.1). Une lecture approfondie de l'ouvrage de Woodford suggère toutefois que les variables qui se réfèrent au ménage représentatif - et donc à tous les ménages du modèle - soient des

variables agrégées *per capita* (cf. annexe A.1). Le nouveau modèle keynésien associe par conséquent des éléments de la première et de la troisième interprétation de l'hypothèse de l'agent représentatif : l'économie est peuplée par un grand nombre de ménages qui se comportent tous exactement de la même manière qu'un d'entre eux - le ménage représentatif -, et les variables qui se réfèrent à eux sont des variables *per capita*.

L'hypothèse du ménage représentatif se trouve également dans la présentation du nouveau modèle keynésien de Galí (2008). Le cadre retenu par Preston (2005) est différent : il suppose l'existence d'un continuum de ménages, i.e. d'un nombre infini de ménages, qui ne sont d'ailleurs pas parfaitement identiques, car le modèle de Preston admet des dotations de richesse initiale différentes.

### 2.1.2 L'utilité du ménage représentatif

Le ménage représentatif maximise l'espérance de la somme actualisée des utilités ressenties dans les périodes courantes et futures :

$$E_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left( u(C_t; \varrho_t) - \int_0^1 v(h_t(I); \varrho_t) dI \right) \right]. \quad (1)$$

$\beta \in [0, 1]$  est le taux d'escompte du ménage, il représente le degré de sa préférence pour le présent. On remarque que l'utilité ressentie pendant une période donnée est additivement séparable en  $C$  et  $h$ . Elle dépend effectivement de sa consommation  $C$  et de la quantité de travail fournie aux firmes  $h$ . On définit  $C_t$  par l'indice de la consommation de Dixit & Stiglitz (1977)

$$C_t \equiv \left( \int_0^1 c_t(i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} di \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad (2)$$

avec  $\sigma > 1$ . Cet indice agrège les quantités consommées  $c_t(i)$  d'un continuum de biens différenciés notés  $i$  ( $i \in [0, 1]$ ). La construction de l'indice traduit l'hypothèse d'une élasticité de substitution constante  $\sigma$  entre deux biens différenciés. L'indice de prix associé à (2) est

$$P_t \equiv \left( \int_0^1 p_t(i)^{1-\sigma} di \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}, \quad (3)$$

avec  $p_t(i)$  le prix en  $t$  du bien différencié  $i$ .  $P_t$  peut également être interprété comme indice du niveau général des prix de l'économie. Le vecteur (ligne) des chocs stochastiques  $\varrho_t$  s'interprète comme un empilement de *perturbations réelles*. Woodford (2003, p. 64) illustre ce type de choc par l'exemple d'une variation exogène dans l'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation agrégée  $C_t$ . L'intuition d'un tel choc est un changement dans l'impatience du ménage à l'égard de la consommation (cf. sous-section 4.1.2 pour une discussion détaillée des chocs regroupés dans  $\varrho_t$ ). Pour  $\varrho_t$  donné, la fonction d'utilité  $u(C; \varrho_t)$  est continue, concave et strictement croissante en  $C$ .

$v(h_t(I))$  représente la désutilité de la quantité du travail spécialisé  $h(I)$  que le ménage fournit à l'industrie qui utilise le type de travail  $I$ . Woodford (2003, p. 148) suppose que chaque bien différencié  $i$  est produit par une seule firme  $i$ . Chaque industrie  $I$  regroupe l'ensemble des firmes qui utilisent le même type de travail  $I$ , avec un continuum d'industries  $I \in [0, 1]$ . Rigoureusement, il faudrait utiliser un système de notation basé sur le double continuum  $(I, i) \in [0, 1] \times [0, 1]$  (cf. Woodford (2003, p. 148)). Un double indice renseignerait alors à la fois sur l'identité de la firme et sur l'industrie. Par exemple,  $h_t(I, i)$  représenterait le travail fourni par le ménage représentatif à l'industrie  $I$  et plus précisément à la firme  $i$ . Pour alléger les notations, il est toutefois préférable de ne retenir que l'indice simple qui est pertinent dans le contexte en question. Concernant

l'utilité du ménage, il est par exemple suffisant d'indiquer l'industrie  $I$ , car cette utilité n'est pas affectée par le fait que ce travail est in fine utilisé par la firme  $i$  plutôt que par une autre firme appartenant à la même industrie.

Pour  $\varrho_t$  donné, la fonction  $v(h ; \varrho_t)$  est continue, convexe et strictement croissante en  $h$ .

Le fait que  $\varrho_t$  soit un argument des fonctions  $u(\cdot ; \varrho_t)$  et  $v(\cdot ; \varrho_t)$  n'exclut pas la possibilité que les perturbations qui s'exercent sur les deux fonctions soient indépendantes. Il suffit d'imaginer que des éléments différents du vecteur  $\varrho_t$  affectent  $u$  et  $v$  (Woodford 2003, p. 144). On pourrait par exemple noter  $\varrho_t(u)$  la variable de perturbation affectant  $u$  et  $\varrho_t(v)$  la variable de perturbation affectant  $v$ . Dans ce cas, le vecteur des perturbations s'écrirait  $\varrho_t \equiv [\varrho_t(u) \quad \varrho_t(v)]$ . Cette écriture correspond au cas simple où chacune des deux fonctions  $u$  et  $v$  est affectée par une seule variable de perturbation. On pourrait imaginer des cas plus complexes où plusieurs perturbations s'exercent sur chaque fonction. Comme cette complexification ne modifierait pas fondamentalement le fonctionnement du modèle, on peut se contenter du cas simple avec seulement deux perturbations indépendantes  $\varrho_t(u)$  et  $\varrho_t(v)$ . Dans une représentation graphique, ces perturbations se traduiraient par des déplacements des courbes d'iso-utilité (ou d'iso-désutilité) associées à  $u$  et  $v$ .

Woodford ne se prononce pas sur une éventuelle positivité de  $u$  et de  $v$ . Toutefois, la positivité de  $v$  est mobilisée dans la suite (cf. sous-section 3.2.5) On peut donc considérer que la positivité de la fonction  $v$  est une hypothèse implicite du modèle.

La continuité de  $u$  et  $v$  est une autre hypothèse implicite du modèle. En absence de cette hypothèse, la résolution du problème d'optimisation du ménage ne serait pas justifiée (cf. sous-section 2.1.5). On peut noter que toutes les fonctions particulières utilisées dans la littérature à des fins d'illustration sont des fonctions continues, cf. par exemple Galí (2008) ou Walsh (2003).

Le fait que les encaisses monétaires ne soient pas un argument de la fonction d'utilité (1) traduit l'hypothèse d'absence de frictions monétaires. En effet, la méthode standard de modéliser la présence de frictions monétaires est d'introduire les encaisses réelles  $\frac{M_t}{P_t}$  dans la fonction d'utilité (Woodford 2003, p. 144). Le ménage a alors intérêt à détenir des encaisses monétaires malgré le fait qu'elles soient moins bien rémunérées que les autres actifs financiers. Un tel comportement correspond justement à l'intuition d'une économie avec frictions monétaires : les agents détiennent de la monnaie pour minimiser les coûts associés à ces frictions.<sup>1</sup>

La fonction d'utilité (1) n'apparaît pas dans l'ouvrage de Woodford (2003). En effet, l'auteur précise une fonction d'utilité qui est adaptée à un contexte d'une économie de dotations sans frictions monétaires (chapitre 2) ainsi qu'une autre qui convient dans le cas d'une économie de production avec frictions monétaires (chapitre 3). C'est à partir de ces deux fonctions que j'ai « reconstitué » l'équation (1) comme la fonction d'utilité qui devrait se trouver en amont de la dérivation du modèle de base du quatrième chapitre de Woodford (2003). Preston (2005) est visiblement arrivé à la même conclusion, car il retient également (1).

Avant de préciser les contraintes qui pèsent sur le ménage, il convient de résoudre d'abord la question de la répartition de la consommation agrégée  $C_t$  sur les biens différenciés. En effet, on peut alors alléger l'écriture de la contrainte budgétaire du ménage en y insérant l'expression de la répartition optimale.

### 2.1.3 Répartition optimale des biens différenciés

Pour un niveau de dépenses de consommation  $\mathfrak{Z}_t$  donné, le ménage représentatif a intérêt à choisir la combinaison des biens différenciés  $c_t(i)$  qui lui permet d'acquérir le plus grand  $C_t$

---

1. Une méthode alternative de modéliser les frictions monétaires est d'imposer aux agents de verser le prix d'une transaction sous forme de monnaie au moment même où la transaction a lieu. Autrement dit, les agents ont besoin d'encaisses monétaires pour pouvoir réaliser des achats. Cette contrainte est connue dans la littérature anglophone sous le nom de *cash-in-advance constraint* (contrainte d'encaisses préalables).

possible. Cet intérêt découle du fait que  $u$  soit strictement croissant en  $C_t$ . Le programme de maximisation en  $t$  associé à ce problème s'écrit alors

$$\begin{aligned} \max_{c_t(i)} \quad & \left( \int_0^1 c_t(i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} di \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad \forall i \\ \text{s/c } \mathfrak{Z}_t = & \int_0^1 p_t(i) c_t(i) di. \end{aligned} \quad (4)$$

On peut résoudre ce problème de maximisation à l'aide du Lagrangien :

$$\mathcal{L} = \left( \int_0^1 c_t(i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} di \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - \lambda_{\mathcal{L}} \left( \int_0^1 p_t(i) c_t(i) di - \mathfrak{Z}_t \right) \quad (5)$$

(cf. Galí (2008, p. 61)). On obtient pour tout bien différencié  $i \in [0, 1]$  la condition de premier ordre

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t(i)} = \left( \frac{\sigma-1}{\sigma} \right) c_t(i)^{-\frac{1}{\sigma}} \times \left( \int_0^1 c_t(i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} di \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \times \left( \frac{\sigma}{\sigma-1} \right) - \lambda_{\mathcal{L}} p_t(i) = 0. \quad (6)$$

A partir de (6), on peut trouver (cf. annexe A.2) la relation entre la quantité consommée de chaque bien différencié et la consommation agrégée

$$c_t(i) = \left( \frac{p_t(i)}{P_t} \right)^{-\sigma} C_t \quad (7)$$

ainsi que l'égalité

$$\int_0^1 p_t(i) c_t(i) di = C_t P_t. \quad (8)$$

L'équation (7) montre comment le ménage répartit sa consommation agrégée  $C_t$  sur les différents biens  $c_t(i)$ ; l'égalité (8) permettra par la suite de substituer dans la contrainte budgétaire du ménage le terme  $\int_0^1 p_t(i) c_t(i) di$  par  $P_t C_t$ , i.e. de passer d'une logique d'intégration des dépenses pour chaque bien différencié à une approche en termes de dépense de consommation globale  $P_t C_t$ .

#### 2.1.4 La contrainte budgétaire

Le ménage représentatif se trouve face à la contrainte budgétaire en termes de flux

$$M_t + B_t \leq W_t + \int_0^1 w_t(I) h_t(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di - T_t - \int_0^1 p_t(i) c_t(i) di \quad \forall t, \quad (9)$$

qui devient, lorsqu'on substitue  $\int_0^1 p_t(i) c_t(i) di$  par  $C_t P_t$  :

$$M_t + B_t \leq W_t + \int_0^1 w_t(I) h_t(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di - T_t - C_t P_t \quad \forall t. \quad (10)$$

$M_t$  représente la richesse détenue *en fin de période* sous forme d'encaisses monétaires.  $B_t$  est la valeur nominale *en fin de période* de la richesse détenue sous forme d'autres actifs financiers, quelque soit leur émetteur (le gouvernement ou des agents privés).  $W_t$  est la richesse totale (sous forme de monnaie et d'autres actifs financiers) *en début de période*. Les flux de revenus du ménage sont composés du terme  $\int_0^1 w_t(I) h_t(I) dI$ , qui correspond au revenu salarial que le ménage perçoit des différentes industries  $I$  ( $w_t(I)$  est le salaire payé dans l'industrie  $I$ ), et du profit agrégé  $\int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di$ , que les firmes versent au ménage représentatif sous forme de dividendes. Il convient de rappeler que les variables qui se réfèrent à l'agent représentatif sont des variables

*per capita*. L'équation (10) indique donc que le ménage représentatif perçoit le profit agrégé *per capita* des firmes, ce qui est cohérent compte tenu de l'hypothèse retenue par rapport au régime de propriété des firmes. En effet, Woodford suppose que chacun des ménages identiques est propriétaire d'une part égale du capital de chaque firme (cf. annexe A.1).  $T_t$  désigne les impôts nominaux nets, i.e. des impôts dont on a retranché les flux de transferts à destination où en provenance du ménage représentatif. Le terme  $C_t P_t$  désigne la dépense de consommation du ménage.

La contrainte budgétaire (10) montre que la richesse monétaire et financière en fin de période doit nécessairement être inférieure ou égale à la richesse héritée de la période précédente, à laquelle on a ajouté les flux des revenus (salaires et dividendes) et dont on a retranché les impôts et les dépenses de consommation.

Il est à première vue surprenant que l'équation (10) ne comporte pas de terme qui correspond explicitement aux revenus d'intérêt. Ceci s'explique par le fait que le paiement des intérêts est supposé se produire *entre la fin d'une période et le début de la période suivante*. Par conséquent,  $W_t$  comprend *déjà* les intérêts perçus pour les actifs détenus à la fin de la période  $t - 1$ . En effet, on peut décomposer  $W_t$  en

$$W_t = (1 + i_{t-1}^m)M_{t-1} + A_t, \quad (11)$$

avec  $i_{t-1}^m$  le taux d'intérêt qui rémunère des avoirs en monnaie déposés auprès de la banque centrale. On remarque que dans une « cashless economy », les ménages n'ont pas intérêt à détenir une partie de leurs encaisses monétaires sous forme d'espèces ou de billets de banque ; ils déposent la totalité de leurs encaisses monétaires pour bénéficier de la rémunération  $i^m$ . Dans ces conditions, l'équation (11) suggère que chaque ménage dispose d'un compte auprès de la banque centrale.  $A_t$  est la valeur en  $t$  du portefeuille des actifs financiers choisis par le ménage en  $t - 1$ . La variable  $W_t$  est implicitement supposée bornée (Woodford 2003, p. 627 - 628). Il s'agit là d'une hypothèse naturelle : l'équation (11) montre effectivement que dans le cas contraire, il faudrait supposer que soit la masse monétaire  $M$ , soit la valorisation des titres  $A$ , soit le taux d'intérêt  $i^m$  n'est pas borné. Comme Woodford (2003, p. 64) suppose des *marchés financiers complets*, ce portefeuille est *a priori* composé d'actifs risqués et non risqués. La valeur de  $A_t$  dépend par conséquent de l'état du monde qui se réalise en  $t$ . Ce portefeuille a été acheté en  $t - 1$  pour son *prix de marché*  $B_{t-1}$ . A l'aide de ce prix, on peut définir le *facteur d'actualisation stochastique*  $Q_{t,t+1}$ . Ce facteur vérifie la relation d'arbitrage

$$B_t = E_t [Q_{t,t+1} A_{t+1}], \quad (12)$$

avec  $E_t$  l'espérance conditionnelle à l'état du monde en  $t$  (Woodford 2003, p. 66). L'interprétation économique de l'opérateur  $E_t$  est celle des anticipations rationnelles, i.e. de l'espérance conditionnelle à l'information disponible en  $t$ . On a donc  $E_t \equiv E(\cdot | \mathcal{I}_t)$ , avec  $\mathcal{I}_t$  l'information disponible en  $t$ . L'ensemble  $\mathcal{I}_t$  contient des informations concernant la réalisation de l'état du monde en  $t$ , les réalisations de l'état du monde dans les périodes antérieures à  $t$ , ainsi que l'ensemble des états du monde possibles à la période  $t + 1$ , étant donné l'état du monde qui s'est réalisé en  $t$ . Woodford ne dit pas de manière explicite que les agents du modèle sont dotés d'anticipations rationnelles. Toutefois, le fait qu'il qualifie systématiquement les équilibres du modèle de « rational expectations equilibria » (équilibres en anticipations rationnelles) montre que les anticipations rationnelles sont une hypothèse implicite du modèle. Galí confirme ce point de vue :

*"Underlying the monetary policy analysis contained in the previous chapters are the assumptions of perfect information and rational expectations, i.e., that both private agents and the central bank know the structure of the economy (specification and parameter values), are able to observe the shocks impinging on the latter, and form expectations in a way consistent with that (correct) model."* (Galí 2008, p. 188)

$Q_{t,t+1}$  est « stochastique » dans la mesure où il intègre les risques associés aux actifs dont le rendement dépend des réalisations de l'état du monde. A l'équilibre,  $Q_{t,t+1}$  doit être unique. En effet, dans le cas contraire, il existerait des possibilités d'arbitrage inexploitées, ce qui serait en contradiction avec le concept d'équilibre.

On peut remplacer  $A_{t+1}$  dans (12) par  $W_{t+1} - (1 + i_t^m)M_t$  (cf. (11)), puis  $B_t$  dans (10) par (12), ce qui donne :

$$(1 - E_t[Q_{t,t+1}](1 + i_t^m))M_t + E_t[Q_{t,t+1}W_{t+1}] \leq W_t + \int_0^1 w_t(I)h_t(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di - T_t - C_t P_t \quad \forall t. \quad (13)$$

Ensuite, on peut remplacer  $E_t[Q_{t,t+1}](1 + i_t^m)$  dans (13) par  $\frac{1+i_t^m}{1+i_t}$ , avec  $i_t$  le taux d'intérêt associé à un actif sans risque à maturité d'une période. En effet, pour un tel actif, (12) s'écrit

$$B_t = E_t[Q_{t,t+1}(1 + i_t)B_t] \Leftrightarrow \frac{1}{1 + i_t} = E_t[Q_{t,t+1}], \quad (14)$$

car  $(i_t, B_t) \in \mathcal{I}_t$ , ce qui implique  $E_t[(1 + i_t)B_t] = (1 + i_t)B_t$  et donc  $E_t[Q_{t,t+1}(1 + i_t)B_t] = E_t[Q_{t,t+1}](1 + i_t)B_t$ . L'actualisation de  $1 + i_t^m$  par la valeur espérée du facteur d'actualisation  $Q_{t,t+1}$  donne alors  $\frac{1+i_t^m}{1+i_t}$ . On obtient alors pour (13) :

$$W_t \geq E_t[Q_{t,t+1}W_{t+1}] + P_t C_t + T_t + \Delta_t M_t - \int_0^1 w_t(I)h_t(I) dI - \int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di \quad \forall t \quad (15)$$

avec  $\Delta_t \equiv \frac{i_t - i_t^m}{1 + i_t}$  un indice du coût d'opportunité de la détention de richesse sous forme monétaire. En exprimant l'inégalité (15) à la période  $t + 1$  et en prenant les anticipations rationnelles de la période  $t$  des valeurs actuelles des membres droite et gauche de cette inégalité, on trouve

$$E_t[Q_{t,t+1}W_{t+1}] \geq E_t[Q_{t,t+2}W_{t+2}] + E_t[Q_{t,t+1}(P_{t+1}C_{t+1} + \Delta_{t+1}M_{t+1} + T_{t+1})] - E_t\left[Q_{t,t+1}\left(\int_0^1 w_{t+1}(I)h_{t+1}(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_{t+1}(i) di\right)\right], \quad (16)$$

en exploitant la loi des espérance itérées,  $E_t[E_{t+1}[\mathcal{X}]] = E_t[\mathcal{X}]$ , et le fait que  $Q_{t,t+1}$  fait partie de l'ensemble d'information  $\mathcal{I}_{t+1}$  associée à l'opérateur  $E_{t+1}$ . Comme  $Q_{t,t+1} \in \mathcal{I}_{t+1}$ , on a effectivement :

$$E_t[Q_{t,t+1}E_{t+1}[Q_{t+1,t+2}W_{t+2}]] = E_t[E_{t+1}[Q_{t,t+1}Q_{t+1,t+2}W_{t+2}]] = E_t[Q_{t,t+2}W_{t+2}].$$

On peut par conséquent remplacer le terme  $E_t[Q_{t,t+1}W_{t+1}]$  de (15) par le membre de droite de (16). De la même manière, le terme  $E_t[Q_{t,t+2}W_{t+2}]$  peut être remplacé par l'espérance de la valeur actuelle en  $t$  de l'expression de (15) associée à la période  $t + 2$ . En répétant ce procédé jusqu'à la période  $T - 1$ , on trouve la *contrainte budgétaire intertemporelle*

$$W_t \geq E_t[Q_{t,T}W_T] + \sum_{s=t}^{T-1} E_t[Q_{t,s}(P_s C_s + \Delta_s M_s)] - \sum_{s=t}^{T-1} E_t\left[Q_{t,s}\left(\int_0^1 w_s(I)h_s(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_s(i) di - T_s\right)\right], \quad (17)$$

avec  $Q_{t,T} \equiv \prod_{s=t+1}^{s=T} Q_{s-1,s}$ , qui devient

$$C_t \leq \frac{\sum_{s=t}^{T-1} E_t\left[Q_{t,s}\left(\int_0^1 w_s(I)h_s(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_s(i) di - \Delta_s M_s - T_s\right)\right]}{P_t} + \frac{W_t - E_t[Q_{t,T}W_T] - \sum_{s=t+1}^{T-1} E_t[Q_{t,s}(P_s C_s)]}{P_t} \quad (18)$$

lorsqu'on isole  $C_t$ .

### 2.1.5 Le programme du ménage

Pour optimiser son niveau d'utilité, le ménage doit faire plusieurs choix. Il doit décider la quantité de travail qu'il souhaite offrir à chaque industrie  $I$ . Simultanément, il choisit le niveau de sa consommation globale. Compte tenu des transferts de richesse des périodes antérieures, et pour des salaires et des prix donnés, ces deux premiers choix déterminent parfaitement la somme qu'il va épargner à la fin de la période en question. Pour transférer cette épargne à la période suivante, il définit un portefeuille d'actifs, composé d'encaisses monétaires et d'autres actifs.<sup>2</sup> La répartition de l'épargne entre encaisses monétaires et autres actifs constitue le troisième choix que le ménage doit effectuer, et ceci simultanément avec les choix de consommation et d'offre de travail.

Compte tenu de ces trois décisions, il est pertinent de retenir comme variables de choix du programme d'optimisation du ménage la consommation agrégée  $C$ , l'offre de travail adressée à chaque industrie  $I$ ,  $h(I)$ , et les encaisses monétaires  $M$ .

A la période  $t$ , le ménage doit choisir le niveau souhaité de chaque variable de choix pour la période  $t$  et pour *toutes les périodes suivantes*. Le problème d'optimisation intertemporelle du ménage s'écrit alors  $\forall I \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned} & \max_{\{C_{t+k}, h_{t+k}(I), M_{t+k}\}_0^\infty} E_t \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left( u(C_{t+k}; \varrho_{t+k}) - \int_0^1 v(h_{t+k}(I); \varrho_{t+k}) dI \right) \right] \\ s/c \quad C_t \leq & \frac{\sum_{s=t}^{T-1} E_t \left[ Q_{t,s} \left( \int_0^1 w_s(I) h_s(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_s(i) di - \Delta_s M_s - T_s \right) \right]}{P_t} \\ & + \frac{W_t - E_t [Q_{t,T} W_T] - \sum_{s=t+1}^{T-1} E_t [Q_{t,s} (P_s C_s)]}{P_t}, \end{aligned} \quad (19)$$

avec  $C_{t+k}, h_{t+k}(I), M_{t+k} \geq 0, \forall I \in [0, 1]$ . La positivité de  $C$  et de  $h(I)$  est basée sur la nature des grandeurs économiques que représentent ces variables. Celle de  $M$  s'explique par l'hypothèse que les autorités monétaires émettent une quantité strictement positive de monnaie (cf. sous-section 2.3.1) et qu'elles ont le monopole de l'émission monétaire, i.e. le ménage ne peut pas émettre une monnaie privée.

La fonction d'objectif du programme (19) ne pose pas de problème en ce qui concerne l'existence d'une solution, car  $u$  et  $v$  sont des fonctions continues. En revanche, la contrainte budgétaire intertemporelle ne décrit *a priori* pas un ensemble fermé et borné. Pour garantir l'existence d'une solution, Woodford (2003, p. 67 - 68) ajoute trois conditions supplémentaires qui rendent l'ensemble des contraintes compact :

$$i_t \geq i_t^m \quad \forall t \quad (20)$$

$$W_{t+1} \geq - \sum_{T=t+1}^{\infty} E_{t+1} \left[ Q_{t+1,T} \left( \int_0^1 w_T(I) h_T(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_T(i) di - T_T \right) \right] \quad (21)$$

$$\sum_{T=t}^{\infty} E_t \left[ Q_{t,T} \left( \int_0^1 w_T(I) h_T(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_T(i) di - T_T \right) \right] < \infty \quad \forall t. \quad (22)$$

Il est bien entendu possible de définir d'autres conditions qui assurent le caractère compact de l'ensemble des contraintes. L'avantage des contraintes (20) - (22) réside dans le fait qu'elles traduisent des intuitions économiques qui ont un sens dans le cadre du modèle.

2. Parmi les autres actifs du portefeuille se trouvent des actifs risqués et des actifs sans risques. En fonction de l'état du monde qui se réalisera à la période suivante, le ménage découvrira alors la valeur *réellement* transférée par son épargne. En effet, pour le portefeuille constitué à la fin de la période  $t$ , cette valeur est donnée par  $W_{t+1}$ , i.e. par la valeur de ce portefeuille en  $t + 1$ .

La contrainte (20) écarte la possibilité d'arbitrage entre monnaie et actifs sans risque. En effet, si (20) n'est pas vérifié, le ménage représentatif peut s'endetter en actifs sans risque en effectuant une opération de vente à découvert de  $\mathcal{N}$  actifs sans risque. Il investit ensuite la somme empruntée en monnaie. Comme la rémunération de la monnaie est dans ce cas supérieure à celle des actifs sans risque, cette opération dégage le profit  $(i^m - i) \times \mathcal{N}$ . Le ménage a par conséquent intérêt à vendre à découvert le plus grand nombre d'actifs possible. Dans le cas limite où  $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ , le ménage peut bénéficier d'une consommation infinie.<sup>3</sup> La lecture mathématique de cette contrainte est la suivante :  $i_s \geq i_s^m \Leftrightarrow \Delta_s \geq 0$ , car la rémunération nominale des actifs sans risque ne peut pas être négative, i.e.  $i_t \geq 0$ . Comme  $M_s \geq 0$ , le terme  $\Delta_s M_s$  est positif. Dans ces conditions, ce terme n'est pas susceptible de remettre en question l'existence d'une solution : au terme  $\Delta_s M_s$  est associé un signe *négatif* dans (19), ce qui garantit le caractère fermé de l'ensemble des contraintes. Dans le cas contraire, i.e. pour  $i_s \leq i_s^m$ , le terme  $\Delta_s M_s$  deviendrait négatif. Toutes choses égales par ailleurs, l'ensemble des contraintes cesserait d'être borné lorsque le ménage fait tendre  $M_s$  vers l'infini.

Les contraintes (21) et (22) sont nécessaires pour empêcher le ménage de financer une consommation infinie à l'aide d'un système à la Ponzi, i.e. par un endettement explosif. En effet, en finançant sa consommation courante par emprunt, puis le remboursement de cet emprunt par un deuxième emprunt plus élevé, etc., le ménage peut théoriquement bénéficier d'une consommation infinie.

La contrainte (21) traduit l'idée que les capacités d'endettement du ménage représentatif sont limitées par ses capacités de remboursement. D'après (21) le ménage peut certes transférer à la fin de la période  $t$  une richesse négative vers la période  $t + 1$ . Toutefois, son endettement ne peut pas être supérieur à l'espérance conditionnelle de la valeur actualisée en  $t + 1$  de la somme de tous ses revenus nets futurs. Ceci est une hypothèse plausible dans un contexte d'information parfaite et complète, car le ménage ne trouvera pas un créancier pour lui accorder un endettement plus élevé. En effet, tout agent du modèle anticiperait de manière rationnelle que le ménage en question ne sera pas capable de rembourser intégralement une telle dette.

La contrainte (22) signifie que l'espérance conditionnelle en  $t$  de la valeur actualisée de tous les revenus nets futurs du ménage est bornée. En effet, sans cette contrainte, le ménage pourrait s'engager dans un système à la Ponzi malgré la prudence des créanciers exprimée par (21). En effet, si (22) n'était pas vérifiée, l'espérance conditionnelle en  $t$  de la valeur actualisée de tous les revenus nets futurs du ménage serait *infinie*; l'intuition économique d'une telle situation serait que le ménage n'aurait pas de difficulté de contracter à la fin de la période  $t$  une dette infinie, car tous les agents du modèle considèrent qu'il dispose de capacités de remboursement infinies.

La contrainte (22) est plausible dans la mesure où des capacités de remboursement infinies n'existent pas dans les économies du monde réel.

Lorsque la condition (22) est vérifiée, l'insertion de (21) dans la contrainte budgétaire de (19) donne (cf. annexe A.3) :

$$C_t \leq \frac{\sum_{s=t}^{\infty} E_t \left[ Q_{t,s} \left( \int_0^1 w_s(I) h_s(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_s(i) di - \Delta_s M_s - T_s \right) \right]}{P_t} + \frac{W_t - \sum_{s=t+1}^{\infty} E_t [Q_{t,s} (P_s C_s)]}{P_t} \quad (23)$$

---

3. Dans un modèle caractérisé par des ménages parfaitement identiques, les possibilités d'arbitrage devraient disparaître instantanément. Supposons que l'on parte d'une situation où (20) n'est pas vérifiée. Comme tous les ménages se comportent de manière identique, ils souhaitent tous vendre à découvert des actifs sans risque. Par conséquent, ils ne trouvent pas de contrepartie pour réaliser cette transaction. Chaque ménage a dans ces conditions intérêt à proposer une rémunération  $i$  plus élevée pour persuader un autre ménage d'acheter à terme l'actif sans risque. Le rendement de l'actif sans risque devrait alors augmenter jusqu'à ce que (20) soit de nouveau vérifiée.

ou encore

$$\sum_{s=t}^{\infty} E_t [Q_{t,s} (P_s C_s + \Delta_s M_s)] \leq W_t + \sum_{s=t}^{\infty} E_t \left[ Q_{t,s} \left( \int_0^1 w_s(I) h_s(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_s(i) di - T_s \right) \right]. \quad (24)$$

Grâce aux conditions (20) et (22), (23) décrit un ensemble compact.

Comme  $W_t$  et  $\sum_{s=t}^{\infty} E_t \left[ Q_{t,s} \left( \int_0^1 w_s(I) h_s(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_s(i) di - T_s \right) \right]$  sont supposés être strictement inférieures à  $+\infty$  (cf. (11) et (22)), on trouve :

$$\sum_{s=t}^{\infty} E_t [Q_{t,s} (P_s C_s + \Delta_s M_s)] < \infty. \quad (25)$$

A ce stade, on ne peut pas encore résoudre le problème du ménage : il n'est pas exprimé sous une forme qui permet le recours aux outils standard de l'analyse microéconomique (théorèmes de Lagrange ou de Kuhn-Tucker). En effet, (19) indique que le consommateur doit maximiser par rapport à  $M_{t+k}$ , mais  $M_{t+k}$  n'est pas argument de la fonction d'utilité du ménage. Le raisonnement suivant permet de contourner cette difficulté. Le fait de détenir de la richesse sous forme d'encaisses monétaires (plutôt que sous d'autres formes) ne procure aucune utilité intrinsèque au ménage. Par conséquent, il n'accepte de stocker sa richesse sous forme monétaire que si la monnaie est au moins aussi bien rémunérée que les autres actifs non risqués. Si ce n'est pas le cas, le ménage renonce à la détention d'encaisses monétaires. On a donc :

$$i_t = i_t^m \quad (26)$$

ou

$$M_t = 0. \quad (27)$$

Dans ces conditions,  $M$  peut être éliminé parmi les variables de choix du ménage. Soit (27) est vérifiée : la quantité des encaisses monétaires est alors déjà déterminée, le choix du ménage pour  $M$  est déjà faite. Soit (26) est vérifiée : dans ce cas, le ménage ne s'intéresse plus à la répartition entre encaisses monétaires et actifs sans risque, qui sont maintenant des substituts parfaits. De plus, le terme  $\Delta_s M_s$  dans la contrainte budgétaire intertemporelle devient égale à zéro, car soit (26) est vérifiée et  $\Delta_s = 0$ , soit (27) est vérifiée et  $M_s = 0$ .<sup>4</sup> Dans les deux cas, le programme du ménage s'écrit  $\forall I \in [0, 1]$  :

$$s/c \ C_t \leq \frac{\max_{\{C_{t+k}, h_{t+k}(I)\}_0^{\infty}} E_t \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left( u(C_{t+k}; \varrho_{t+k}) - \int_0^1 v(h_{t+k}(I); \varrho_{t+k}) dI \right) \right]}{P_t} + \frac{W_t - \sum_{s=t+1}^{\infty} E_t [Q_{t,s} (P_s C_s)]}{P_t} \quad (28)$$

Les préférences du ménage représentatif satisfont l'hypothèse de non saturation locale. En définissant la nouvelle variable « absence de travail »  $\left( - \int_0^1 h(I) dI \right)$ , on peut effectivement montrer que les préférences du ménage vérifient la monotonicité forte. Soit deux paniers de consommation et d'absence de travail,  $\mathcal{F}_j = (C_{j,t}, C_{j,t+1}, \dots; - \int_0^1 h_{j,t}(I) dI; - \int_0^1 h_{j,t+1}(I) dI; \dots)$ ,  $j = 1, 2$ .

4. On verra dans la suite que c'est l'équation (26) qui est pertinente, car la stricte positivité de l'offre de monnaie rend (27) impossible (cf. 2.3.1).

On suppose que tous les éléments de ces deux paniers sont identiques à l'exception d'un. Si la quantité de cet élément dans le panier  $\mathcal{F}_1$  est strictement supérieure à celle contenue dans  $\mathcal{F}_2$ , on aura  $\mathcal{F}_1 \succ \mathcal{F}_2$ . Ceci vient des propriétés des fonctions  $u$  et  $v$ . La monotonie forte implique à son tour la non saturation locale. Grâce à la non saturation locale, le problème du ménage peut être exprimé avec une contrainte budgétaire sous forme d'égalité :

$$C_t = \frac{\sum_{s=t}^{\infty} E_t \left[ Q_{t,s} \left( \int_0^1 w_s(I) h_s(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_s(i) di - T_s \right) \right]}{P_t} + \frac{W_t - \sum_{s=t+1}^{\infty} E_t [Q_{t,s} (P_s C_s)]}{P_t} \quad (29)$$

Le fait que la contrainte budgétaire soit maintenant vérifiée sous forme d'égalité implique la *condition de transversalité* (cf. annexe A.4) :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E_t [Q_{t,T} W_T] = 0. \quad (30)$$

L'intuition de cette condition est que la valeur actualisée d'une richesse accumulée par le ménage dans un avenir lointain devient négligeable lorsque cet avenir est suffisamment éloigné du présent.

Les méthodes de résolution habituelle du problème du ménage conduisent à une impasse, car elles aboutissent systématiquement à la condition d'Euler

$$E_t [\beta u_C(C_{t+1}; \varrho_{t+1})] - \lambda_{\mathcal{L}} E_t \left[ \frac{Q_{t,t+1} P_{t+1}}{P_t} \right] = 0. \quad (31)$$

Cette équation pose problème, car la suite du raisonnement mobilise également une équation qui correspond à la condition (31) sans opérateur des anticipations rationnelles, i.e.  $\beta u_C(C_{t+1}; \varrho_{t+1}) = \lambda_{\mathcal{L}} \frac{Q_{t,t+1} P_{t+1}}{P_t}$ . Cette condition ne peut pas être obtenue par la résolution habituelle du programme (28). Pour sortir de cette impasse, il convient de suivre l'astuce de Woodford (2003, p. 70) qui dérive dans un premier temps des conditions d'Euler associées à un contexte de certitude, i.e. qui sont caractérisées par le fait que les variables de la période  $t+1$  ne sont pas considérées comme anticipées (cf. la sous-section prochaine). La justification théorique de ce procédé est la suivante : le fait que le ménage formule à la période  $t$  des anticipations revient à dire qu'il associe des probabilités de réalisation à chaque état du monde susceptible de se réaliser en  $t+1, t+2, \dots$ . On peut donc considérer que le ménage, au lieu de résoudre le programme (28), résout *pour chacun de ces états* le programme

$$\begin{aligned} \max_{\{C_{t+k}, h_{t+k}(I)\}_0^{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left( u(C_{t+k}; \varrho_{t+k}) - \int_0^1 v(h_{t+k}(I); \varrho_{t+k}) dI \right) \\ s/c \quad C_t = \frac{\sum_{s=t}^{\infty} Q_{t,s} \left( \int_0^1 w_s(I) h_s(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_s(i) di - T_s \right)}{P_t} + \frac{W_t - \sum_{s=t+1}^{\infty} Q_{t,s} (P_s C_s)}{P_t}. \end{aligned} \quad (32)$$

La solution du programme (32) peut être trouvée à l'aide du Lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left( u(C_{t+k}; \varrho_{t+k}) - \int_0^1 v(h_{t+k}(I); \varrho_{t+k}) dI \right) \\ - \lambda_{\mathcal{L}} \left\{ C_t + \frac{\sum_{s=t}^{\infty} Q_{t,s} \left( - \int_0^1 w_s(I) h_s(I) dI \right) + \sum_{s=t+1}^{\infty} Q_{t,s} (P_s C_s) + \mathfrak{R}_t}{P_t} \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

avec  $\mathfrak{R}_t \equiv \sum_{s=t}^{\infty} Q_{t,s} \left( - \int_0^1 \mathcal{P}_s(i) di + T_s \right) - W_t$ .

### 2.1.6 Conditions d'Euler

Concernant les quantités optimales de la consommation aux périodes  $t$  et  $t + 1$ , on trouve à l'aide du Lagrangien (33) les conditions de premier ordre suivantes :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = u_C(C_t; \varrho_t) - \lambda_{\mathcal{L}} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{t+1}} = \beta u_C(C_{t+1}; \varrho_{t+1}) - \lambda_{\mathcal{L}} \frac{Q_{t,t+1} P_{t+1}}{P_t} = 0, \quad (35)$$

avec  $u_C(C_t; \varrho_t) \equiv \frac{\partial u(C_t; \varrho_t)}{\partial C_t}$ . Les conditions de deuxième ordre du problème du ménage prouvent que (34) et (35) sont bien associées à un maximum (cf. annexe A.5). En divisant (34) par (35), on obtient

$$\frac{u_C(C_t; \varrho_t)}{u_C(C_{t+1}; \varrho_{t+1})} = \frac{\beta P_t}{Q_{t,t+1} P_{t+1}}. \quad (36)$$

La condition (36) doit être vérifiée *pour tout état du monde qui est susceptible de se réaliser à chacune des périodes  $t \geq 0$  et pour tout état du monde possible en  $t + 1$ , compte tenu de l'état du monde qui s'est effectivement réalisé à la période  $t$*  (Woodford 2003, p. 70).  $Q_{t,t+1}$  s'interprète dans (36) comme la valeur spécifique que le facteur d'actualisation prend dans un état du monde particulier qui est possible à la période  $t + 1$ .

L'équation (36) décrit l'allocation intertemporelle de la consommation du ménage. Celui-ci répartit sa consommation entre les périodes  $t$  et  $t + 1$  en fonction du niveau des prix en  $t$  et  $t + 1$ , ainsi qu'en fonction du facteur d'actualisation et de sa préférence pour le présent. L'optimalité de cette allocation réside dans le fait que le ratio entre les utilités marginales des consommations en  $t$  et en  $t + 1$  égalise le rapport des prix associés à ces consommations, ce rapport étant actualisé par le facteur  $Q_{t,t+1}$  et pondéré par la préférence pour le présent  $\beta$ .

En réarrangeant la condition (36) et en appliquant l'opérateur  $E_t$  à ces membres de gauche et de droite, on obtient l'expression

$$E_t \left[ \frac{1}{Q_{t,t+1}} \right] = E_t \left[ \frac{u_C(C_t; \varrho_t)}{u_C(C_{t+1}; \varrho_{t+1})} \frac{P_{t+1}}{\beta P_t} \right], \quad (37)$$

qui est d'après (14) équivalente à

$$1 + i_t = \beta^{-1} E_t \left[ \frac{u_C(C_t; \varrho_t)}{u_C(C_{t+1}; \varrho_{t+1})} \frac{P_{t+1}}{P_t} \right]. \quad (38)$$

L'équation (38) s'interprète comme (36), sauf qu'elle introduit explicitement l'incertitude concernant la réalisation de l'état du monde en  $t + 1$ .

L'équation (38) joue un rôle central dans le nouveau modèle keynésien. A l'équilibre général, il est en effet possible de construire à partir de cette équation une courbe de type « IS » (cf. sous-section 3.2.3).

Pour ce qui concerne la quantité de travail du type  $I$  offerte par le ménage à la période  $t$ , le Lagrangien (33) donne

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_t(I)} = -v_h(h_t(I); \varrho_t) + \lambda_{\mathcal{L}} \frac{w_t(I)}{P_t} = 0, \quad (39)$$

avec  $v_h(h_t(I); \varrho_t) \equiv \frac{\partial v(h_t(I); \varrho_t)}{\partial h_t(I)}$ . Cette condition de premier ordre est bien associée à un maximum (cf. annexe A.5). En divisant (39) par (34), on trouve la condition standard d'une offre de travail concurrentielle (Galí 2008, p. 17 - 18)

$$\frac{v_h(h_t(I); \varrho_t)}{u_C(C_t; \varrho_t)} = \frac{w_t(I)}{P_t}, \quad (40)$$

ce qui est cohérent par rapport aux hypothèses du modèle quant à la structure du marché du travail. Cette structure est effectivement celle de la *concurrence pure et parfaite*. En effet, sur chaque segment  $I$  du marché du travail se rencontrent une infinité de firmes qui recrutent le travail spécialisé de type  $I$  et un grand nombre de ménages, car chaque ménage fournit tous les types de travail spécialisé (cf. la fonction d'utilité (1)). Par conséquent, firmes et ménages se trouvent dans la position d'un preneur de salaire : elles fixent la quantité de travail offerte ou demandée sur le marché du travail en fonction du salaire qui y est actuellement en vigueur. Dans ces conditions, le marché du travail est forcément et en permanence à l'équilibre concurrentiel.

La condition (40) montre que le ménage égalise l'utilité marginale de sa consommation et la désutilité marginale du travail du type  $I$ . Autrement dit, le ménage augmente son offre de travail tant que l'utilité de la dernière quantité consommée est supérieure ou égale à la désutilité associée à la dernière quantité de travail offerte. L'équation (40) réapparaîtra dans la sous-section 2.2.2, car elle aura un impact sur les coûts marginaux et le prix optimal des firmes.

Les équations (38) et (40) résument le comportement d'optimisation du ménage : elles spécifient comment le ménage détermine les quantités de ses variables de choix (consommation et offre de travail), étant donnés les processus  $\{P_t\}$  et  $\{i_t\}$  qui s'imposent à lui. Le processus  $\{P_t\}$  dépend en effet de la tarification mise en œuvre par les firmes tandis que  $\{i_t\}$  est placé (indirectement) sous la responsabilité des autorités monétaires.<sup>5</sup> Les deux sous-sections suivantes exposent par conséquent d'abord le comportement des firmes (sous-section 2.2), puis celui des autorités monétaires (sous-section 2.3).

## 2.2 Maximisation du profit des firmes

Le nouveau modèle keynésien suppose l'existence d'un continuum des firmes qui sont *preneurs de salaires* sur le marché du travail car la structure du marché est - comme on vient de voir dans la section précédente - celle de la *concurrence pure et parfaite*.

En revanche, elles sont - dans les limites de leur pouvoir de marché - *faiseurs de prix* sur le marché des biens. La structure du marché des biens est effectivement celle de la *concurrence monopolistique*. Plus précisément, le modèle retient la formalisation de Dixit & Stiglitz (1977). Les différents biens sont des substituts imparfaits, avec  $\sigma$ , l'élasticité de substitution entre deux biens différenciés. Les aspects concurrentiels de cette structure de marché ne constituent d'ailleurs pas la seule limite au pouvoir de fixation des prix des firmes. Cette sous-section montrera que ce pouvoir est également entravé par la rigidité des prix des biens, i.e. par l'inertie des prix du passé.

Bien que la rigidité des prix des biens soit une caractéristique fondamentale du nouveau modèle keynésien de base du quatrième chapitre de Woodford (2003), cette sous-section déroulera le comportement des firmes d'abord dans un contexte de prix flexibles. L'intérêt de ce procédé réside dans le fait que l'équilibre en prix flexibles constitue un point de référence indispensable pour l'étude du comportement du modèle dans son contexte normal de prix rigides.

La rigidité des prix et la double structure de marché vont déterminer le comportement des firmes. Leur pouvoir de fixation des prix - bien que sérieusement limité par l'inertie des prix et par les aspects concurrentiels de la structure du marché des biens - leur permet d'appliquer des marges aux coûts marginaux et de réaliser des profits économiques. Le calcul de ces marges nécessite la connaissance des coûts de la firme. Dans une première étape, il convient de présenter la fonction de production des firmes.

---

5. On verra dans la sous-section 2.3.1 que les autorités monétaires fixent  $i_t^m$  et non  $i_t$ , mais on peut parler d'un contrôle indirect de  $i_t$  dans la mesure où l'égalité  $i_t^m = i_t$  est systématiquement vérifiée à l'équilibre (cf. 3.1.2).

### 2.2.1 Fonction de production

Chaque firme  $i$  est caractérisée par la fonction de production

$$y_t(i) = \mathcal{A}_t f(h_t(i)), \quad (41)$$

avec  $y_t(i)$  la quantité du bien  $i$  produite par la firme  $i$ . On remarque que  $i$  renseigne à la fois sur l'identité du bien différencié et sur celle de la firme spécialisée qui produit ce bien. Comme le bien  $i$  est produit par une seule firme, on peut utiliser la notation  $i$  sans risque de confusion pour désigner le bien et la firme.

La fonction  $f(\cdot)$  est croissante et concave (Woodford 2003, p. 148). Pour éviter des incohérences économiques, en l'occurrence des quantités de biens négatives, elle doit également être positive sur  $[0, +\infty]$ .  $\mathcal{A}_t$  est un facteur qui représente le niveau technique du processus de production. L'indice temporel associé à  $\mathcal{A}$  indique que ce niveau est susceptible d'évoluer au cours du temps. Woodford suppose que cette évolution obéit à un processus exogène au modèle, ce qui ouvre la voie à l'intégration du progrès technique dans le modèle. On remarque l'absence d'un indice ( $i$ ) associé à  $\mathcal{A}$ . *Le niveau technique est donc celui de l'économie, partagé par l'ensemble des firmes, quelque soit leur spécialisation.* Le seul facteur de production utilisé par la firme  $i$  est le travail  $h_t(i)$ .

A partir de cette fonction de production, on peut maintenant calculer les coûts de la firme.

### 2.2.2 Coûts de la firme

La fonction de production montre que les salaires sont les seuls coûts auxquels la firme  $i$  doit faire face. On a donc le coût total

$$CT_t(i) = w_t(I)h_t(i), \quad (42)$$

avec  $w_t(I)$  le salaire dans l'industrie  $I$  que la firme  $i$  paie à ses salariés. Pour la firme  $i$ , ce salaire est donné, il est établi sur le segment concurrentiel  $I$  du marché de travail.

En substituant  $h_t(i)$  dans (42) par la fonction réciproque de (41), on obtient

$$CT_t(i) = w_t(I) \times f^{-1}(y_t(i)/\mathcal{A}_t). \quad (43)$$

Le *coût marginal nominal* de la firme  $i$  est donné par

$$S_t(i) \equiv \frac{\partial CT_t(i)}{\partial y_t(i)} = \frac{w_t(I)}{\mathcal{A}_t} \times \Psi(y_t(i)/\mathcal{A}_t), \quad (44)$$

avec  $\Psi(y_t(i)/\mathcal{A}_t) \equiv \frac{1}{f'(f^{-1}(y_t(i)/\mathcal{A}_t))} = \frac{d(f^{-1}(y_t(i)/\mathcal{A}_t))}{d(y_t(i)/\mathcal{A}_t)}$  une fonction qui est croissante et positive sur l'intervalle  $[0, +\infty]$ . En divisant par l'indice des prix  $P_t$ , on trouve le *coût marginal réel* de la firme :

$$s_t(i) \equiv \frac{S_t(i)}{P_t} = \frac{w_t(I)}{\mathcal{A}_t P_t} \times \Psi(y_t(i)/\mathcal{A}_t), \quad (45)$$

Pour trouver une expression alternative du coût marginal réel dans laquelle ce coût n'est fonction que des quantités produites (et d'un vecteur de perturbations), il est nécessaire d'ajouter des hypothèses d'équilibre. Pour remplacer  $w_t(I)$  dans (45), on mobilise la condition (40) et le fait que l'on a  $y_t(i) = c_t(i)$  à l'équilibre partiel du marché du bien  $i$  et  $Y_t = C_t$  à l'équilibre général (cf. sous-section 3.1.1). On exploite également le fait que toutes les firmes de l'industrie  $I$  sont confrontées aux mêmes conditions, i.e. elles ont la même fonction de production, elles doivent payer le même salaire et elles sont confrontées à la même demande pour les différents biens

qu'elles produisent. Cette identité des conditions implique qu'elles appliquent toutes le même prix  $p_t(I)$ . A l'équilibre, (7) devient pour chaque firme  $i$  du secteur  $I$  :

$$y_t(i) = Y_t \left( \frac{p_t(i)}{P_t} \right)^{-\sigma} = Y_t \left( \frac{p_t(I)}{P_t} \right)^{-\sigma}, \quad (46)$$

avec  $Y_t$  un indice de la production agrégée défini par

$$Y_t \equiv \left[ \int_0^1 y_t(i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} di \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}. \quad (47)$$

On a donc  $y_t(i) = y_t(j) \forall i, j \in I$ , i.e. toutes les firmes du secteur  $I$  ont des quantités de production identiques, par conséquent elles utilisent des quantités de travail identiques. On trouve pour la production agrégée de l'industrie  $y_t(I) = y_t(i)$  et pour sa demande de travail agrégée  $h_t(I) = h_t(i)$  (cf. annexe A.6). On peut alors écrire :

$$w_t(I) = \frac{v_h(f^{-1}(y_t(I)/\mathcal{A}_t); \varrho_t) P_t}{u_C(Y_t; \varrho_t)} \quad (48)$$

et on obtient l'expression alternative du coût marginal réel

$$s_t(i) \equiv \frac{S_t(i)}{P_t} = s(y_t(i), y_t(I), Y_t; \tilde{\varrho}_t), \quad (49)$$

avec  $s(y_t(i), y_t(I), Y_t, \tilde{\varrho}_t) = \frac{v_h(f^{-1}(y_t(I)/\mathcal{A}_t); \varrho_t)}{u_C(Y_t; \varrho_t) \mathcal{A}_t} \times \Psi(y_t(i)/\mathcal{A}_t)$ . Le nouveau vecteur des perturbations exogènes  $\tilde{\varrho}_t$  regroupe l'ancien vecteur  $\varrho_t$  et le processus exogène qui détermine le niveau technique  $\mathcal{A}_t$ . Si l'on retient le cas simple où  $\varrho_t \equiv [\varrho_t(u) \quad \varrho_t(v)]$ , le nouveau vecteur s'écrit  $\tilde{\varrho}_t \equiv [\varrho_t(u) \quad \varrho_t(v) \quad \mathcal{A}_t]$ . Il n'y a priori aucune raison plausible qui plaide en faveur de l'existence d'une dépendance entre  $\varrho_t$  et  $\mathcal{A}_t$ . On retiendra par conséquent dans la suite que  $\varrho_t$  est orthogonal à  $\mathcal{A}_t$ .

### 2.2.3 Tarification dans un contexte de flexibilité des prix

L'environnement de parfaite flexibilité des prix est caractérisé par le fait que chaque firme peut tarifier en  $t$  librement le prix qu'elle souhaite, sans aucune contrainte exercée par les prix appliqués dans les périodes précédentes. De plus, la firme connaît ses fonctions de coût et observe parfaitement la demande pour son bien (Woodford 2003, p. 151), qui est donnée par l'équation (46) (cf. la sous-section précédente).

Malgré le fait que la firme  $i$  soit faiseur du prix  $p_t(i)$ , elle considère  $P_t$  et  $Y_t$  dans la fonction de demande (46) comme donnés. Ceci paraît normal dans la mesure où les poids du prix  $p_t(i)$  dans l'indice  $P_t$  et de la production  $y_t(i)$  dans l'indice  $Y_t$  sont infiniment petits.

Pour un niveau de production  $y_t(i)$  donné, i.e. à l'équilibre du marché des biens, le programme de maximisation du profit  $\mathcal{P}_t(i)$  de la firme  $i$  s'écrit

$$\begin{aligned} \max_{p_t(i)} \mathcal{P}_t(i) &= p_t(i)y_t(i) - w_t(I) \times f^{-1}(y_t(i)/\mathcal{A}_t) \\ s/c \quad y_t(i) &= Y_t \left[ \frac{p_t(i)}{P_t} \right]^{-\sigma} \end{aligned} \quad (50)$$

ou encore

$$\max_{p_t(i)} \mathcal{P}_t(i) = p_t(i)Y_t \left[ \frac{p_t(i)}{P_t} \right]^{-\sigma} - w_t(I) \times f^{-1} \left( Y_t \left[ \frac{p_t(i)}{P_t} \right]^{-\sigma} / \mathcal{A}_t \right). \quad (51)$$

On trouve la condition de premier ordre

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}_t(i)}{\partial p_t(i)} &= p_t^{-\sigma}(i)(1 - \sigma) \frac{Y_t}{P_t^{-\sigma}} \\ &\quad - \frac{w_t(I)}{\mathcal{A}_t} \times \frac{d(f^{-1}(y_t(i)/\mathcal{A}_t))}{d(y_t(i)/\mathcal{A}_t)} \times (-\sigma) \frac{Y_t}{P_t^{-\sigma}} p_t(i)^{-(\sigma+1)} = 0, \end{aligned} \quad (52)$$

qui est bien associée à un maximum. En effet, dans le programme (50), le chiffre d'affaire de la firme  $p_t(i)y_t(i)$  est une fonction croissante concave de  $y_t(i)$  et  $f^{-1}(y_t(i)/\mathcal{A}_t)$  est une fonction croissante convexe en  $y_t(i)$ . Comme le terme  $w_t(I)f^{-1}(y_t(i)/\mathcal{A}_t)$  est doté d'un signe négatif, le profit est une fonction concave de  $y_t(i)$ . La contrainte de (50),  $y_t(i) = Y_t \left[ \frac{p_t(i)}{P_t} \right]^{-\sigma}$  (qui correspond aux ventes du bien  $i$ ), est une fonction décroissante du prix  $p_t(i)$ , le profit  $\mathcal{P}_t(i)$  doit donc être une fonction concave en  $p_t(i)$  (Woodford 2003, p. 154).

Lorsqu'on exprime (52) en fonction du coût marginal nominal  $S_t(i)$ , on trouve l'équation

$$p_t(i) = \mathcal{M} S_t(i), \quad (53)$$

avec  $\mathcal{M} = \frac{\sigma}{\sigma-1}$ , qui indique que la firme  $i$  applique la marge  $\mathcal{M}$  à son coût marginal nominal.

#### 2.2.4 Niveau de production dans un contexte de flexibilité des prix

Une fois le prix optimal  $p_t(i)$  donné par l'équation (53), il est possible de déterminer la quantité optimale  $y_t(i)$ . En effet, en divisant (53) par l'indice des prix  $P_t$ , on trouve le prix relatif que la firme  $i$  souhaite fixer :

$$\frac{p_t(i)}{P_t} = \mathcal{M} \frac{S_t(i)}{P_t} = \mathcal{M} s(y_t(i), y_t(I), Y_t; \tilde{\varrho}_t), \quad (54)$$

Comme le ratio  $\frac{p_t(i)}{P_t}$  vérifie en même temps (cf. (46))

$$\frac{p_t(i)}{P_t} = \left( \frac{y_t(i)}{Y_t} \right)^{-\frac{1}{\sigma}}, \quad (55)$$

on trouve la quantité optimale

$$y_t(i) = \{ \mathcal{M} s(y_t(i), y_t(I), Y_t; \tilde{\varrho}_t) \}^{-\sigma} Y_t. \quad (56)$$

Pour garantir unicité de la solution de (56), il faut que le coût marginal réel  $s(y_t(i), y_t(I), Y_t; \tilde{\varrho}_t)$  soit ou bien toujours croissante en  $y_t(i)$ , ou bien toujours décroissante en  $y_t(i)$ . Comme la fonction de production  $f(h_t(i))$  est croissante et concave,  $f^{-1}(y_t(i)/\mathcal{A}_t)$  doit être convexe, par conséquent  $\frac{d^2(f^{-1}(y_t(i)/\mathcal{A}_t))}{d(y_t(i)/\mathcal{A}_t)^2}$  est positif. On a alors

$$\frac{\partial s(y_t(i), y_t(I), Y_t; \tilde{\varrho}_t)}{\partial y_t(i)} = \frac{w_t(I)}{\mathcal{A}_t^2} \times \frac{d^2(f^{-1}(y_t(i)/\mathcal{A}_t))}{d(y_t(i)/\mathcal{A}_t)^2} \geq 0, \quad (57)$$

i.e. le coût marginal réel est toujours croissant en  $y_t(i)$  et la solution de (56) est effectivement unique.

On peut maintenant définir le *niveau naturel de la production* : c'est le niveau de l'indice de la production agrégée  $Y_t$  que l'on observe dans le contexte particulier de cette sous-section, i.e. lorsque les prix sont parfaitement flexibles. En effet, toutes les firmes de l'économie se trouvent dans une situation parfaitement identique, ce qui implique qu'elles produisent toutes une quantité *identique* du bien dans la production duquel elles sont spécialisées, i.e. on a  $y_t(i) = y_t(j) \forall i, j$ .

Cette quantité est notée  $Y_t^n$ , et on a  $y_t(i) = y_t(I) = Y_t = Y_t^n$ . L'égalité entre  $y_t(i)$  et  $y_t(I)$  est justifiée dans l'annexe A.6. Celle entre  $Y_t^n$  et  $Y_t$  s'explique par la définition de l'indice  $Y_t$  et par le fait que  $Y_t^n$  est indépendant de  $i$ . Dans ces conditions, on a effectivement

$$Y_t \equiv \left[ \int_0^1 (y_t(i))^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} di \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \left[ \int_0^1 (Y_t^n)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} di \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = Y_t^n. \quad (58)$$

On remarque que le niveau naturel de la production renseigne en même temps sur le niveau du production de chaque firme  $i$ , de chaque industrie  $I$  et de l'économie dans son ensemble.

En substituant dans l'équation (56)  $y_t(i)$ ,  $y_t(I)$  et  $Y_t$  par  $Y_t^n$ , on obtient :

$$Y_t^n = \{ \mathcal{M} s(Y_t^n, Y_t^n, Y_t^n; \tilde{\varrho}_t) \}^{-\sigma} Y_t^n, \quad (59)$$

ou encore

$$Y_t^n = \left\{ \mathcal{M} \frac{v_h(f^{-1}(Y_t^n/\mathcal{A}_t); \varrho_t) d(f^{-1}(Y_t^n/\mathcal{A}_t))}{u_C(Y_t^n; \varrho_t) \mathcal{A}_t} \right\}^{-\sigma} Y_t^n. \quad (60)$$

La présence du vecteur  $\tilde{\varrho}_t$  dans (59) montre que le niveau naturel de la production n'est pas statique, mais affecté par des perturbations.

## 2.2.5 Tarification dans un contexte de prix rigides

Pour modéliser la rigidité des prix, le nouveau modèle keynésien fait usage d'un mécanisme très simple proposé par Calvo (1983) : les opportunités de fixation des prix arrivent selon un processus exogène de Poisson. Dans un souci de simplifier le raisonnement, Woodford (2003, p. 179) modifie légèrement la loterie de Calvo : le tirage n'a pas lieu au niveau individuel (i.e. pour chaque firme  $i$ ), mais au niveau de chaque industrie  $I$ . Avec une probabilité  $\vartheta \in ]0, 1[$ , toutes les firmes appartenant à l'industrie  $I$  doivent continuer d'appliquer le prix en vigueur à la période précédente ; avec la probabilité  $(1 - \vartheta)$  elles peuvent librement choisir leur prix de vente. La probabilité  $\vartheta$  est la même dans toutes les industries  $I \in [0, 1]$ . Dans ces conditions, une proportion  $1 - \vartheta$  des firmes de l'économie peut ajuster en  $t$  le prix de vente et une proportion  $\vartheta$  des firmes se voit contrainte d'appliquer de nouveau les prix qu'elles avaient déjà utilisés en  $t - 1$ .

Une firme qui peut modifier son prix de vente à la période  $t$  va choisir le prix  $p_t^*(i)$  qui maximise l'espérance de la valeur actualisée du profit cumulé pendant les périodes où ce prix reste en vigueur. Pour un niveau de production  $y_t(i)$  donné, le programme de maximisation de l'espérance de la valeur actualisée du profit de la firme  $i$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} \max_{p_t(i)} E_t \left[ \sum_{T=t}^{\infty} \vartheta^{T-t} Q_{t,T} \mathcal{P}_T \right] \\ \text{s/c } y_T(i) = Y_T \left[ \frac{p_t(i)}{P_T} \right]^{-\sigma} \end{aligned} \quad (61)$$

ou encore

$$\max_{p_t(i)} E_t \left\{ \sum_{T=t}^{\infty} \vartheta^{T-t} Q_{t,T} \left[ p_t(i) Y_T \left[ \frac{p_t(i)}{P_T} \right]^{-\sigma} - w_T(I) f^{-1} \left( Y_T \left[ \frac{p_t(i)}{P_T} \right]^{-\sigma} / \mathcal{A}_T \right) \right] \right\}. \quad (62)$$

Dans ce programme, le facteur  $\vartheta^{T-t}$  correspond à la probabilité que la firme  $i$  utilise à la période  $T$  toujours le prix  $p_t(i)$ . La condition de premier ordre associé au programme (62) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_t \left[ \sum_{T=t}^{\infty} \vartheta^{T-t} Q_{t,T} \mathcal{P}_T \right]}{\partial p_t(i)} = 0 = \\ E_t \left[ \sum_{T=t}^{\infty} \vartheta^{T-t} Q_{t,T} \left( -(\sigma - 1) Y_T \left( \frac{p_t(i)}{P_T} \right)^{-\sigma-1} \left[ \frac{p_t(i)}{P_T} - \mathcal{M} s(y_t(i), y_t(I), Y_T; \tilde{\varrho}_T) \right] \right) \right] \end{aligned} \quad (63)$$

et permet de trouver le prix optimal appliqué par la firme. La condition de premier ordre (63) est associée à un maximum. En effet, le chiffre d'affaire de la firme dans le programme (62) est une fonction croissante concave du terme  $Y_T \left[ \frac{p_t(i)}{P_T} \right]^{-\sigma}$  et  $f^{-1}(y_T(i)/\mathcal{A}_t)$  est une fonction croissante convexe en  $Y_T \left[ \frac{p_t(i)}{P_T} \right]^{-\sigma}$ . Comme le terme  $w_T(I)f^{-1}(y_T(i)/\mathcal{A}_t)$  est doté d'un signe négatif, l'espérance de la valeur actualisée du profit est une fonction concave de  $Y_T \left[ \frac{p_t(i)}{P_T} \right]^{-\sigma}$ . Le terme  $Y_T \left[ \frac{p_t(i)}{P_T} \right]^{-\sigma}$  (les ventes du bien  $i$ ) est une fonction décroissante du prix  $p_t(i)$ , l'espérance de la valeur actualisée du profit de la firme  $E_t \left\{ \sum_{T=t}^{\infty} \vartheta^{T-t} Q_{t,T} \mathcal{P}_T \right\}$  doit donc être une fonction concave en  $p_t(i)$ .

Le terme  $-(\sigma - 1)Y_T \left( \frac{p_t(i)}{P_T} \right)^{-\sigma-1}$  est différent de zéro, car  $(\sigma - 1)$ ,  $Y_T$ ,  $P_T$  et  $p_t(i)$  sont supposés être strictement positifs. On trouve par conséquent à partir de la condition de premier ordre (63) :

$$E_t \left[ \sum_{T=t}^{\infty} \vartheta^{T-t} Q_{t,T} \left( \frac{p_t(i)}{P_T} - \mathcal{M}s(y_T(i), y_T(I), Y_T; \tilde{\varrho}_T) \right) \right] = 0 \quad (64)$$

ou encore

$$E_t \left[ \sum_{T=t}^{\infty} \vartheta^{T-t} Q_{t,T} \left( \frac{p_t(i)}{P_T} - \mathcal{M} \frac{v_h(f^{-1}(y_T(I)/\mathcal{A}_T); \varrho_T)}{u_C(Y_T; \varrho_T) \mathcal{A}_T} \times \frac{d(f^{-1}(y_T(i)/\mathcal{A}_T))}{d(y_T(i)/\mathcal{A}_T)} \right) \right] = 0. \quad (65)$$

Comme toutes les firmes capables d'ajuster leur prix de vente se trouvent devant le même problème d'optimisation, elles choisiront *toutes* un même prix optimal, noté  $p_t^*$ . On aura donc une proportion  $1 - \vartheta$  des firmes de l'économie qui appliquent le prix  $p_t^*(i) = p_t^*$ .

Les autres firmes, qui ne peuvent pas ajuster leur prix à la période  $t$ , sont tirées de manière aléatoire et indépendante d'une période à l'autre parmi l'ensemble des firmes. L'existence d'un très grand nombre de firmes garantit la validité et l'applicabilité de la loi des grands nombres. Dans ces conditions, on peut considérer que chaque prix particulier faisant partie de la distribution des prix utilisés en  $t - 1$  réapparaîtra avec la même fréquence dans le sous-ensemble des prix tarifés par les firmes empêchées d'ajuster leur prix de vente. En particulier, la moyenne des prix appliqués en  $t$  par ces dernières correspond à la moyenne des prix appliqués à la période précédente par l'ensemble des firmes de l'économie, soit  $P_{t-1}$ . Dans ces conditions, l'indice des prix  $P_t$  s'écrit :

$$\begin{aligned} P_t &= \left[ \int_0^{1-\vartheta} p_t^*{}^{1-\sigma}(i) di + \int_{1-\vartheta}^1 p_{t-1}^{1-\sigma}(i) di \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &= \left[ \int_0^{1-\vartheta} p_t^*{}^{1-\sigma} di + \int_{1-\vartheta}^1 P_{t-1}^{1-\sigma} di \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &= \left[ (1 - \vartheta)p_t^*{}^{1-\sigma} + \vartheta P_{t-1}^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \end{aligned} \quad (66)$$

Toutes les firmes d'une industrie modifient leur prix de vente à la même période. Comme elles sont toutes parfaitement identiques, elles choisissent toutes le même prix  $p_t^*$ . D'ailleurs, les firmes appartenant aux autres industries qui peuvent modifier leur prix de vente à la même période choisissent également  $p_t^*$ , car toutes ces firmes se trouvent exactement dans la même situation : elles sont toutes caractérisées par la même fonction de production (41) et elles sont toutes confrontées à la même fonction de demande (46). Soit  $y_t^*$  la demande qui s'adresse à

chaque firme qui applique le prix  $p_t^*$ . Cette demande est donnée d'après la logique de l'équation (46) par :

$$y_t^* = \left( \frac{p_t^*}{P_t} \right)^{-\sigma} Y_t. \quad (67)$$

On peut alors remplacer  $y_T(i)$  et  $y_T(I)$  par  $y_T^*$  dans l'équation (65) et l'on trouve alors

$$E_t \left[ \sum_{T=t}^{\infty} \vartheta^{T-t} Q_{t,T} \left( \frac{p_t^*}{P_T} - \mathcal{M} \frac{v_h(f^{-1}(y_T^*/\mathcal{A}_T); \varrho_T)}{u_C(Y_T; \varrho_T) \mathcal{A}_T} \frac{d(f^{-1}(y_T^*/\mathcal{A}_T))}{d(y_T^*/\mathcal{A}_T)} \right) \right] = 0. \quad (68)$$

A l'aide de l'équation (60), on peut faire apparaître le niveau naturel de la production. Pour cela, on simplifie (60) ce qui permet d'écrire :

$$\mathcal{M}^{-1} = \frac{v_h(f^{-1}(Y_t^n/\mathcal{A}_t); \varrho_t)}{u_C(Y_t^n; \varrho_t) \mathcal{A}_t} \frac{\partial(f^{-1}(Y_t^n/\mathcal{A}_t))}{\partial(Y_t^n/\mathcal{A}_t)}. \quad (69)$$

Maintenant, on peut substituer le terme  $\mathcal{M}$  dans (68) par l'inverse du membre de droite de (69) et l'on obtient ainsi

$$E_t \left[ \sum_{T=t}^{\infty} \vartheta^{T-t} Q_{t,T} \left( \frac{p_t^*}{P_T} - \frac{v_h(f^{-1}(y_T^*/\mathcal{A}_T); \varrho_T) \frac{d(f^{-1}(y_T^*/\mathcal{A}_T))}{d(y_T^*/\mathcal{A}_T)}}{u_C(Y_T; \varrho_T) \mathcal{A}_T} \right) \right] = 0. \quad (70)$$

Le prix optimal relatif est alors donné par l'expression :

$$\frac{p_t^*}{P_T} = \frac{v_h(f^{-1}(y_t^*/\mathcal{A}_t); \varrho_t) \frac{d(f^{-1}(y_t^*/\mathcal{A}_t))}{d(y_t^*/\mathcal{A}_t)}}{u_C(Y_t; \varrho_t) \mathcal{A}_t} \frac{v_h(f^{-1}(Y_t^n/\mathcal{A}_t); \varrho_t) \frac{d(f^{-1}(Y_t^n/\mathcal{A}_t))}{d(Y_t^n/\mathcal{A}_t)}}{u_C(Y_t^n; \varrho_t) \mathcal{A}_t} - E_t \left[ \sum_{T=t+1}^{\infty} \vartheta^{T-t} Q_{t,T} \left( \frac{p_t^*}{P_T} - \frac{v_h(f^{-1}(y_T^*/\mathcal{A}_T); \varrho_T) \frac{d(f^{-1}(y_T^*/\mathcal{A}_T))}{d(y_T^*/\mathcal{A}_T)}}{u_C(Y_T; \varrho_T) \mathcal{A}_T} \frac{v_h(f^{-1}(Y_T^n/\mathcal{A}_T); \varrho_T) \frac{d(f^{-1}(Y_T^n/\mathcal{A}_T))}{d(Y_T^n/\mathcal{A}_T)}}{u_C(Y_T^n; \varrho_T) \mathcal{A}_T} \right) \right]. \quad (71)$$

Woodford (2003, p. 177) admet que certains aspects de la modélisation de la rigidité des prix à la Calvo sont - selon ses propres mots - « pleinement irréalistes ». Il fait toutefois remarquer que les implications pour le comportement dynamique du modèle sont proches de celles de la modélisation beaucoup plus intuitive qui explique la rigidité des prix par des coûts d'ajustement (Rotemberg 1987). Dans ce contexte, l'hypothèse de la concurrence monopolistique joue un rôle très intéressant, car elle favorise la cohérence interne du modèle : la concurrence pure et parfaite pose effectivement des problèmes d'articulation majeurs avec la justification théorique de la rigidité des prix par les coûts d'ajustement ; en effet, si la rigidité des prix empêchait une firme de baisser son prix pour rejoindre le niveau d'équilibre, elle risquerait de perdre la *totalité* de la demande qui s'adresse à elle. Dans ces conditions, les coûts d'ajustement devraient atteindre des niveaux exorbitants pour justifier le fait que les prix soient rigides. La concurrence monopolistique offre un scénario beaucoup plus cohérent : empêchée de tarifier le prix d'équilibre, la firme perd seulement une partie de sa clientèle, ce qui peut être compatible avec des faibles coûts d'ajustement.

A ce stade, le comportement des agents privés de l'économie est spécifié de manière exhaustive. Avant de décrire l'équilibre associé à ces comportements, il convient de compléter le modèle par la description des comportements des agents publics. La sous-section 2.3 est consacrée à ce sujet.

## 2.3 Comportements des autorités politiques

Dans le nouveau modèle keynésien, les politiques économiques concernent deux domaines : la politique monétaire, assurée par les autorités monétaires, et la politique budgétaire, dont la charge est confiée aux autorités budgétaires.

### 2.3.1 Politique monétaire

Les autorités monétaires disposent de deux instruments de la politique monétaire : l'offre de monnaie  $M_t^s$ , i.e. la quantité de monnaie émise, et le taux d'intérêt  $i_t^m$  qui rémunère les avoirs en monnaie auprès de la banque centrale.

Concernant l'offre de monnaie, Woodford (2003, p. 71) se contente de l'hypothèse qu'elle est toujours strictement positive :

$$M_t^s > 0 \quad \forall t. \quad (72)$$

Le taux d'intérêt  $i_t^m$  est supposé être déterminé en fonction d'une règle de politique monétaire. Le nouveau modèle keynésien peut être complété par de nombreuses règles de politique monétaires qui permettent de définir un équilibre en anticipations rationnelles (cf. par exemple Evans & Honkapohja (2003) pour une revue de la littérature en anglais, ou Zumpe (2010, 2011) pour une introduction technique en la matière en langue française). Ici, je retiens à titre d'illustration la règle

$$i_t^m = \varphi(\Pi_t/\Pi_t^*, Y_t/Y_t^*, \mathbf{v}_t) \quad (73)$$

avec  $\Pi_t \equiv \frac{P_t}{P_{t-1}}$  le facteur d'inflation,  $\Pi_t^*$  et  $Y_t^*$  les cibles de l'inflation brute et de la production suivie par les autorités monétaires et  $\mathbf{v}_t$  un terme de perturbation. Ce dernier terme correspond à la composante non systématique de la politique monétaire ;  $\mathbf{v}_t$  représente notamment des erreurs qui peuvent affecter la conduite de la politique monétaire, comme par exemple des erreurs de mesure ou de contrôle (Woodford 2003, p. 241). Les processus  $\{\Pi_t^*\}$ ,  $\{Y_t^*\}$  et  $\{\mathbf{v}_t\}$  sont supposés exogènes et non explosifs. Le choix de la règle (73) s'explique par le fait que la règle (linéaire) de type Taylor associée à une cible d'inflation égale à zéro,

$$\hat{i}_t = \varphi_\pi \pi_t + \varphi_x x_t, \quad (74)$$

peut être considérée comme approximation log-linéaire de (73) autour d'un état stationnaire (dans (74),  $\hat{i}_t$  est le taux d'intérêt exprimé en déviation par rapport à sa valeur à l'état stationnaire,  $\pi_t$  l'inflation et  $x_t$  l'écart de production : l'annexe A.7 présente les techniques de log-linéarisation mobilisées dans la présente étude et la sous-section 3.2 expose leur application aux règles de politique monétaires ; la sous-section 3.2 donne également des définitions rigoureuses des variables  $\hat{i}_t$ ,  $\pi_t$  et  $x_t$ ). L'intérêt de la règle (74) réside dans le fait qu'elle joue un rôle important dans la littérature sur la politique monétaire dans le nouveau modèle keynésien (cf. Evans & Honkapohja (2003)).<sup>6</sup> La règle non-linéaire (73) traduit l'idée que les autorités monétaires fixent le taux d'intérêt  $i_t^m$  en fonction du décalage de l'inflation brute courante par

---

6. Woodford (2003, p. 241) suggère

$$i_t^m = \varphi(\Pi_t/\Pi_t^*, Y_t, \mathbf{v}_t)$$

comme expression d'une règle de Taylor non-linéaire. Par log-linéarisation autour de l'état stationnaire, Woodford (2003, p. 245) obtient l'expression

$$\hat{i}_t = \varphi_\pi(\pi_t - \bar{\pi}) + \varphi_x \hat{Y}_t + \bar{i}_t.$$

Cette dernière équation permet effectivement une lecture en termes de la règle de Taylor classique dès que l'on suppose que les autorités monétaires utilisent le niveau de la production à l'état stationnaire  $\bar{Y}$ , comme indicateur (au sens de l'anglais « proxy ») du niveau naturel de la production,  $Y_t^n$  (cf. sous-section 3.2 pour une définition rigoureuse de  $\bar{Y}$ ). Dans ce cas,  $\hat{Y}_t$  peut être interprété comme approximation de l'écart de production  $x_t$ , car  $\ln\left(\frac{Y_t}{\bar{Y}}\right) \simeq \frac{Y_t - \bar{Y}}{\bar{Y}}$ . Je n'ai pas retenu dans ce papier cette règle proposée par Woodford dans la mesure où l'utilisation de  $\hat{Y}_t$  comme mesure de l'écart de production est incompatible avec l'analyse des conséquences de fluctuations de  $Y_t^n$  autour de  $\bar{Y}$  qui sont cruciales dans le nouveau modèle keynésien.

rapport à sa cible et en fonction du décalage de la production courante par rapport à la cible de production.

### 2.3.2 Politique budgétaire

L'évolution de l'endettement de l'État  $D_t$  est supposée être donnée par un processus exogène non explosif (Woodford 2003, p. 76). Dans ces conditions, la politique budgétaire est spécifiée par le choix de la répartition de cet engagement sur les différents instruments qui permettent de lever les fonds privés correspondants.

Les deux types d'instruments retenus dans le nouveau modèle keynésien sont les obligations publiques et la monnaie. La composition des engagements de l'État  $D_t$  est donc donnée par l'équation

$$D_t \equiv B_t^s + M_t^s, \quad (75)$$

avec  $B_t^s$  l'offre d'obligations publiques à la fin de la période  $t$  exprimée en termes de leur valeur nominale au moment de l'émission. Pour des raisons de simplicité, les autorités budgétaires sont supposées émettre *un seul type d'obligations publiques : des obligations sans risque à maturité d'une période* (Woodford 2003, p. 76).

L'impôt nominal net  $T_t$  que les autorités monétaires doivent récolter à chaque période pour assurer l'équilibre budgétaire est parfaitement déterminé par la rémunération des obligations publiques  $i$  et par les processus  $\{D_t\}$  et  $\{M_t^s\}$ . Dans cette perspective, il convient de spécifier la contrainte budgétaire publique en termes de flux que les autorités budgétaires doivent respecter à chaque période  $t$  :

$$B_t^s + T_t + (M_t^s - M_{t-1}^s) = (1 + i_{t-1})B_{t-1}^s + i_{t-1}^m M_{t-1}^s. \quad (76)$$

Les ressources des autorités monétaires (regroupées dans le membre de gauche de (76)) sont les obligations nouvellement émises à la période  $t$ , les impôts nets levés en  $t$  et le seigneurage, i.e. la création monétaire entre les périodes  $t - 1$  et  $t$ . Ces ressources permettent de financer les emplois (regroupés dans le membre de droite de (76)) : à la période  $t$ , les autorités budgétaires doivent rembourser et rémunérer par le taux d'intérêt sans risque  $i_{t-1}$  la totalité des obligations émises en  $t - 1$  ; de plus, elles doivent rémunérer par le taux d'intérêt  $i_{t-1}^m$  les avoirs en monnaie que les ménages avaient déposés en  $t - 1$  sur leurs comptes auprès de la banque centrale.

En isolant  $T_t$  et en substituant  $B_t^s$  par  $(D_t - M_t^s)$  (d'après l'équation (75)), on trouve :

$$T_t = (1 + i_{t-1})(D_{t-1} - \Delta_{t-1}M_{t-1}^s) - D_t. \quad (77)$$

L'équation (77) montre que, pour un taux d'intérêt  $i_t$  et pour des processus  $\{D_t\}$  et  $\{M_t^s\}$  donnés, l'impôt que les autorités budgétaires doivent lever est parfaitement déterminé.

Les comportements de tous les agents du modèle sont maintenant complètement spécifiés. Il se pose alors la question de savoir si ces comportements sont mutuellement compatibles sur tous les marchés du modèle. Dans cette perspective, la section suivante précise d'abord les conditions d'équilibre sur chaque marché, ce qui permettra ensuite de définir l'équilibre général de l'économie.

## 3 L'étude du nouveau modèle keynésien à l'équilibre en anticipations rationnelles

### 3.1 Équilibre général

L'équilibre général est notamment caractérisé par l'apurement simultané de tous les marchés à chaque période. On entend par apurement un mécanisme (à préciser pour chaque marché) qui

assure que les quantités offertes et demandées soient exactement les mêmes, i.e. offre excédentaire ou demande excédentaire sont nulles.

Concernant les marchés des titres, de la monnaie et des biens, Woodford (2003, p. 71) présente explicitement les conditions qui garantissent l'apurement.

### 3.1.1 Conditions d'apurement des marchés

La condition d'apurement du marché de la monnaie est

$$M_t = M_t^s \quad \forall t, \quad (78)$$

avec  $M_t^s$  l'offre de monnaie, i.e. la quantité de monnaie émise par les autorités monétaires.

L'apurement du marché des titres est garanti par la condition

$$A_{t+1} = A_{t+1}^s \quad \forall t, \quad (79)$$

avec  $A_{t+1}^s$  la valeur de marché au début de la période  $t+1$  de l'ensemble des *obligations publiques* détenues par le ménage représentatif à la fin de la période  $t$  (Woodford 2003, p. 71). Cette définition de l'offre des titres  $A_{t+1}^s$  est a priori surprenante, car elle semble plus restrictive que celle de la demande de titres. En effet,  $A_{t+1}$  a été préalablement définie comme la valeur du portefeuille des actifs financiers (i.e. des actifs autres que les avoirs en monnaie) choisi par le ménage représentatif (Woodford 2003, p. 64 - 65). Les titres émis par des agents privés sont donc pris en compte dans la demande de titres  $A_{t+1}$ , mais non dans l'offre des titres  $A_{t+1}^s$ . Ce changement de logique ne semble pas correspondre à l'introduction d'une hypothèse excluant explicitement des titres privés. En effet, aucune hypothèse de ce type ne se trouve entre les pages 64 et 71 de Woodford (2003).

Il me semble que l'absence de titres privés dans  $A_{t+1}^s$  s'explique par deux éléments de la modélisation des agents privés dans le nouveau modèle keynésien : l'absence du capital dans la fonction de production des firmes et l'hypothèse des ménages parfaitement identiques. L'offre de titres ne peut pas émaner des firmes pour la simple raison qu'elles n'ont pas de besoin de financement. Elles financent le paiement des salaires - leurs seuls coûts de production à cause de l'absence du capital dans la fonction de production - en puisant dans les fonds récoltés lors de la vente des biens produits. Les seuls agents susceptibles d'émettre des titres privés sont alors les ménages. Toutefois, à l'équilibre du marché des titres, l'émission de titres émis par les ménages est nécessairement nulle. En effet, les ménages sont tous supposés parfaitement identiques, ce qui implique que soit ils souhaitent *tous* acheter des titres privés, soit ils souhaitent *tous* vendre de titres privés. Comme les ménages sont les seuls agents susceptibles d'acheter ces titres (les firmes n'interviennent pas sur le marché des titres et le gouvernement intervient exclusivement en tant qu'émetteur d'obligations publiques), la seule quantité d'équilibre pour les titres privés est zéro.

La demande de titres se dirige par conséquent exclusivement vers des titres publics. *On en déduit que le portefeuille du ménage représentatif  $A_{t+1}$  ne contient que des obligations publiques.*

Woodford ne précise pas le mécanisme qui garantit l'apurement sur les marchés des titres et de la monnaie. L'explication la plus évidente est celle de la flexibilité des prix d'actifs. Une telle hypothèse (implicite) paraît tout à fait plausible, compte tenu de la flexibilité des prix d'actifs sur les marchés financiers du monde réel.

La flexibilité des prix ne peut pas être le mécanisme qui assure l'apurement sur les marchés des biens. En effet, la condition d'apurement du marché de chaque bien  $i$

$$c_t(i) = y_t(i) \quad \forall t, \quad (80)$$

est vérifiée à la fois dans un contexte de prix flexibles *et* dans un contexte de prix rigides. *Le mécanisme responsable pour l'apurement des marchés des biens est l'ajustement mécanique de l'offre à la demande :*

*"I assume that the supplier of good  $i$  is committed to supply whatever quantity buyers may wish to purchase at the predetermined price  $p_t(i)$ , and hence to purchase whatever quantity of inputs may turn out to be necessary to fill orders."* (Woodford 2003, p. 155)

Le niveau de production est donc déterminé par la demande Woodford (2003, p. 242). Il s'agit là d'une des caractéristiques keynésiennes du modèle.

La condition (80) implique qu'au niveau agrégé, la demande du ménage représentatif doit vérifier

$$C_t = Y_t \quad \forall t. \quad (81)$$

L'ajustement instantané de l'offre à la demande signifie que dans (81), c'est bien  $Y_t$  qui s'ajuste à  $C_t$ .

Woodford ne précise pas la condition d'apurement du marché du travail. Ceci ne veut pourtant pas dire qu'il envisage la possibilité que le marché du travail puisse être en déséquilibre. Une telle configuration semble même impossible dans le nouveau modèle keynésien de base, compte tenu de l'hypothèse des salaires parfaitement flexibles (Woodford 2003, p. 239) : la flexibilité des salaires implique effectivement qu'*aucun déséquilibre ne peut apparaître sur le marché du travail* ; l'apparition d'un écart entre offre et demande de travail aboutirait instantanément à un réajustement du salaire qui ferait disparaître cet écart.

### 3.1.2 L'équilibre en anticipations rationnelles

Grâce aux conditions d'apurement des marchés et au fait qu'à l'équilibre général, les conditions d'optimalité du ménage représentatif et les conditions de maximisation du profit des entreprises soient simultanément vérifiées, il est maintenant possible de définir l'équilibre général de l'économie en question. Plus précisément, il s'agit de trouver une solution pour le trinôme des variables endogènes  $\{P_t, Y_t, i_t\}$ .

On s'intéressera d'abord à la définition de l'équilibre général associé au contexte du nouveau modèle keynésien de base, i.e. à un contexte de rigidité des prix. Ensuite, on présentera la définition de cet équilibre qui convient dans un contexte de prix flexibles.

Dans cette optique, on substitue dans les équations (36) et (38) la variable  $Y$  à  $C$  selon la condition (81) et l'on incorpore dans le vecteur  $\varrho$  le choc affectant le niveau technique  $\mathcal{A}_t$ . On trouve alors :

$$Q_{t,t+1} = \frac{u_C(Y_{t+1}; \varrho_{t+1})}{u_C(Y_t; \varrho_t)} \frac{\beta P_t}{P_{t+1}} \quad (82)$$

et

$$1 + i_t = \beta^{-1} E_t \left[ \frac{u_C(Y_t; \varrho_t)}{u_C(Y_{t+1}; \varrho_{t+1})} \frac{P_{t+1}}{P_t} \right] \quad (83)$$

On exprime maintenant (82) à différentes périodes pour trouver  $Q_{t,t+1}, Q_{t+1,t+2}, \dots, Q_{T-1,T}$ . En faisant la somme de ces éléments, on obtient  $Q_{t,T}$ , le facteur d'actualisation stochastique entre les périodes  $t$  et  $T$  :

$$Q_{t,T} = \beta^{T-t} \frac{u_C(Y_T; \varrho_T)}{u_C(Y_t; \varrho_t)} \frac{P_t}{P_T}. \quad (84)$$

Maintenant, on remplace  $Q_{t,T}$  dans (30) par le membre de droite de l'équation (84) et l'on obtient ainsi

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E_t \left[ \beta^{T-t} \frac{u_C(Y_T; \varrho_T)}{u_C(Y_t; \varrho_t)} \frac{P_t}{P_T} W_T \right] = 0 \quad (85)$$

ou encore

$$\beta^{-t} \frac{P_t}{u_C(Y_t; \varrho_t)} \lim_{T \rightarrow \infty} E_t \left[ \beta^T \frac{u_C(Y_T; \varrho_T)}{P_T} W_T \right] = 0, \quad (86)$$

car le terme  $\beta^{-t} \frac{P_t}{u_C(Y_t; \varrho_t)}$  est borné, indépendant de  $T$  et il appartient à l'ensemble d'information  $\mathcal{I}_t$ . Comme ce terme est différent de zéro pour  $P_t > 0$ , l'équation (86) implique que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \beta^T E_t \left[ \frac{u_C(Y_T; \varrho_T)}{P_T} W_T \right] = 0. \quad (87)$$

Ensuite, il convient de remarquer que la conjonction de la stricte positivité de l'offre de monnaie (72) et de la condition d'apurement du marché de la monnaie (78) implique que la rémunération des avoirs en monnaie auprès de la banque centrale et celle des actifs sans risque doivent être identiques, i.e.  $i_t = i_t^m$ . En effet, lorsque (72) et (78) sont simultanément vérifiées, on a forcément

$$M_t > 0, \quad (88)$$

i.e. le ménage représentatif détient de la monnaie sur son compte auprès de la banque centrale. Comme le ménage est supposé rationnel, il n'agirait pas ainsi s'il pouvait obtenir une meilleure rémunération en investissant dans d'autres actifs non-risqués (cf. équations (26) et (27)). On en déduit que la rémunération de la monnaie  $i_t^m$  et celle des autres actifs non risqués doivent être strictement identiques, i.e. on a  $i_t = i_t^m, \forall t$ .

A l'équilibre général, l'équation (25) devient alors

$$\sum_{T=t}^{\infty} E_t [Q_{t,T} (P_T Y_T)] < \infty, \quad (89)$$

car  $C_T = Y_T$  et  $\Delta_T = 0$ . On substitue ensuite  $Q_{t,T}$  par le membre de droite de (84) :

$$\sum_{T=t}^{\infty} E_t \left[ \beta^{T-t} \frac{u_C(Y_T; \varrho_T)}{u_C(Y_t; \varrho_t)} P_t Y_T \right] = \beta^{-t} \frac{P_t}{u_C(Y_t; \varrho_t)} \sum_{T=t}^{\infty} E_t \left[ \beta^T u_C(Y_T; \varrho_T) Y_T \right] < \infty, \quad (90)$$

Le terme  $\beta^{-t} \frac{P_t}{u_C(Y_t; \varrho_t)}$  est fini pour des valeurs finies de  $P_t$  et de  $Y_t$ , ce qui permet d'écrire :

$$\sum_{T=t}^{\infty} \beta^T E_t [u_C(Y_T; \varrho_T) Y_T] < \infty. \quad (91)$$

Comme  $i_t = i_t^m$ , on peut substituer  $i_t$  à  $i_t^m$  dans le règle de politique monétaire (73) :

$$i_t = \varphi(\Pi_t / \Pi_t^*, Y_t / Y_t^*, \mathbf{v}_t) \quad (92)$$

Finalement, on exploite le fait que les conditions d'optimalité du ménage représentatif et les conditions de maximisation du profit des entreprises sont simultanément vérifiées. On peut alors remplacer le terme  $Q_{t,T}$  dans (70) par le membre de droite de l'équation (84) qui provient du comportement optimal du ménage représentatif (cf. équation (36)). On obtient

$$E_t \left[ \sum_{T=t}^{\infty} \vartheta^{T-t} \beta^{T-t} \frac{u_C(Y_T; \varrho_T)}{u_C(Y_t; \varrho_t)} \frac{P_t}{P_T} \left( \frac{p_t^*}{P_T} - \frac{v_h(f^{-1}(y_T^*/\mathcal{A}_T); \varrho_T)}{u_C(Y_T; \varrho_T) \mathcal{A}_T} \times \frac{d(f^{-1}(y_T^*/\mathcal{A}_T))}{d(y_T^*/\mathcal{A}_T)} \right) \right] = 0. \quad (93)$$

ou encore, lorsqu'on multiplie les membres de gauche et de droite de (93) par le terme  $\frac{u_C(Y_t; \varrho_t)}{P_t}$

$$E_t \left[ \sum_{T=t}^{\infty} (\vartheta\beta)^{T-t} \frac{u_C(Y_T; \varrho_T)}{P_T} \left( \frac{p_t^*}{P_T} - \frac{\frac{v_h(f^{-1}(y_T^*/A_T); \varrho_T)}{u_C(Y_T; \varrho_T)} \mathcal{A}_T \times \frac{d(f^{-1}(y_T^*/A_T))}{d(y_T^*/A_T)}}{\frac{v_h(f^{-1}(Y_T^n/A_T); \varrho_T)}{u_C(Y_T^n; \varrho_T)} \mathcal{A}_T \times \frac{d(f^{-1}(Y_T^n/A_T))}{d(Y_T^n/A_T)}} \right) \right] = 0. \quad (94)$$

Cette opération de multiplication est possible dans la mesure où le terme  $\frac{u_C(Y_t; \varrho_t)}{P_t}$  est élément de l'ensemble d'information  $\mathcal{I}_t$  associée à l'opérateur des anticipations rationnelles  $E_t$ , ce qui implique que  $\frac{u_C(Y_t; \varrho_t)}{P_t} E_t[\mathcal{X}] = E_t \left[ \frac{u_C(Y_t; \varrho_t)}{P_t} \mathcal{X} \right]$ .

Après ces modifications, on aboutit à la définition suivante de l'équilibre général dans le contexte du modèle de base de Woodford (2003), i.e. dans un contexte de rigidité de prix :

**Définition 1 :** *Un équilibre en anticipations rationnelles de la version de base du nouveau modèle keynésien est un trinôme des processus  $\{P_t, Y_t, i_t\}$  qui vérifie les équations*

$$P_t = \left[ (1 - \vartheta)p_t^* 1^{-\sigma} + \vartheta P_{t-1}^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad (66)$$

$$1 + i_t = \beta^{-1} E_t \left[ \frac{u_C(Y_t; \varrho_t)}{u_C(Y_{t+1}; \varrho_{t+1})} \frac{P_{t+1}}{P_t} \right] \quad (83)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \beta^T E_t [u_c(Y_T; \varrho_T) W_T / P_T] = 0 \quad (87)$$

$$\sum_{T=t}^{\infty} \beta^T E_t [u_c(Y_T; \varrho_T) Y_T] < \infty \quad (91)$$

$$i_t = \varphi(\Pi_t / \Pi_t^*, Y_t / Y_t^*, \mathbf{v}_t) \quad (92)$$

$$E_t \left[ \sum_{T=t}^{\infty} (\vartheta\beta)^{T-t} \frac{u_C(Y_T; \varrho_T)}{P_T} \left( \frac{p_t^*}{P_T} - \frac{\frac{v_h(f^{-1}(y_T^*/A_T); \varrho_T)}{u_C(Y_T; \varrho_T)} \mathcal{A}_T \times \frac{d(f^{-1}(y_T^*/A_T))}{d(y_T^*/A_T)}}{\frac{v_h(f^{-1}(Y_T^n/A_T); \varrho_T)}{u_C(Y_T^n; \varrho_T)} \mathcal{A}_T \times \frac{d(f^{-1}(Y_T^n/A_T))}{d(Y_T^n/A_T)}} \right) \right] = 0 \quad (94)$$

à toute période  $t \geq 0$ , étant donnée les processus de perturbation exogènes (non-explosifs)  $\{\tilde{\varrho}_t\}$  et  $\{\mathbf{v}_t\}$ , une créance publique caractérisée par le processus exogène (non-explosif)  $\{D_t\}$  et une offre de monnaie caractérisée par le processus exogène non-explosif  $\{M_t^s\}$ , avec  $M_t^s \geq 0 \forall t$  (Woodford 2003, p. 241 - 242).

On remarque que l'opérateur des anticipations rationnelles  $E_t$  est présente dans trois de ces six équations. L'hypothèse des anticipations rationnelles occupe donc une place centrale dans la définition de l'équilibre général. C'est pour cette raison que la littérature retient pour cet équilibre l'appellation « équilibre en anticipations rationnelles ». <sup>7</sup>

Le fait du supposer un environnement caractérisé par la parfaite flexibilité des prix ne modifie pas les comportements des ménages et des autorités monétaires. On retrouve par conséquent les équations (83), (87), (91) et (92) dans la définition de l'équilibre en anticipations rationnelles sous prix flexibles.

7. La définition de l'équilibre en anticipations rationnelles présentée ici modifie très légèrement celle donnée par Woodford (2003, p. 241 - 242) dans la mesure où elle l'adapte au contexte particulier retenu dans cette présentation, caractérisé par l'absence de biens et services produits par le gouvernement.

En revanche, le comportement des firmes change par rapport à ce que l'on a pu observer dans un contexte de prix rigides. En effet, chaque firme  $i$  applique comme prix de vente le prix optimal  $p_t^*$ , ce qui implique qu'au niveau agrégé, le indice des prix est égal au prix optimal, i.e. on a  $P_t = p_t^*$ . D'autre part, sous l'hypothèse des prix flexibles, le niveau agrégé de la production est *par définition* égal au niveau naturel de la production, i.e. on a  $Y_t = Y_t^n$ . A partir des ces éléments, on peut maintenant définir l'équilibre en anticipations rationnelles dans un environnement de prix flexibles :

**Définition 2 :** *Un équilibre en anticipations rationnelles du nouveau modèle keynésien avec prix flexibles est un trinôme des processus  $\{P_t, Y_t, i_t\}$  qui vérifie les équations*

$$P_t = p_t^* \quad (95)$$

$$Y_t = Y_t^n \quad (96)$$

$$1 + i_t = \beta^{-1} E_t \left[ \frac{u_C(Y_t; \varrho_t)}{u_C(Y_{t+1}; \varrho_{t+1})} \frac{P_{t+1}}{P_t} \right] \quad (83)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \beta^T E_t [u_C(Y_T; \varrho_T) W_T / P_T] = 0 \quad (87)$$

$$\sum_{T=t}^{\infty} \beta^T E_t [u_C(Y_T; \varrho_T) Y_T] < \infty \quad (91)$$

$$i_t = \varphi(\Pi_t / \Pi_t^*, Y_t / Y_t^*, \mathbf{v}_t) \quad (92)$$

à toute période  $t \geq 0$ , étant donnée les processus de perturbation exogènes (non-explosifs)  $\{\bar{\varrho}_t\}$  et  $\{\mathbf{v}_t\}$ , une créance publique caractérisée par le processus exogène (non-explosif)  $\{D_t\}$  et une offre de monnaie caractérisée par le processus exogène non-explosif  $\{M_t^s\}$ , avec  $M_t^s \geq 0 \forall t$ .

Les équilibres en anticipations rationnelles sont définies en termes d'équations dont la manipulation n'est pas toujours aisée à cause de leur caractère non-linéaire. La sous-section 3.2 montre comment on peut surmonter cette difficulté en mobilisant des techniques de linéarisation.

### 3.2 La dérivation du nouveau modèle keynésien linéarisé

A partir des éléments développés préalablement dans cette section, il est maintenant possible de construire une version linéarisée du nouveau modèle keynésien de base. Celle-ci est destinée à l'étude d'équilibres associés à des fluctuations *de faible ampleur* autour d'un état stationnaire déterministe. Dans cette perspective, on peut se contenter de linéariser les équations en question (Woodford 2003, p. 79), i.e. ici les équations (66), (83), (92) et (94) du système qui décrit l'équilibre en anticipations rationnelles du nouveau modèle keynésien de base.

Dans la mesure où l'on procédera à des *log-linéarisations autour de l'état stationnaire déterministe*, il convient de définir d'abord cet état.

#### 3.2.1 Définition de l'état stationnaire

Le caractère déterministe de l'état stationnaire se traduit par l'absence totale de chocs, i.e. on a  $\mathbf{v}_t = \bar{\mathbf{v}} = 0$ ,  $\varrho_t = \bar{\varrho} = 0$  et  $\mathcal{A}_t = \bar{\mathcal{A}}$ , avec  $\bar{\mathcal{A}}$  la valeur *constante* que prend le niveau technique à l'état stationnaire. Pour simplifier les calculs, on normalise  $\bar{\mathcal{A}}$ , i.e. on suppose  $\bar{\mathcal{A}} = 1$  (Woodford 2003, p. 225).

L'absence de chocs joue un rôle clé dans la définition du niveau de la production  $\bar{Y}$  qui caractérise l'état stationnaire en question : en effet, à cet état stationnaire, toutes les variables de production sont égales à  $\bar{Y}$ . On a  $Y_t = y_t(i) = y_t^* = Y_t^* = Y_t^n = \bar{Y}$ .  $\bar{Y}$  est le niveau de l'indice

de la production agrégée que l'on observerait dans un contexte de prix parfaitement flexibles *et* en absence de chocs.  $\bar{Y}$  est donc un cas particulier du niveau naturel de la production  $Y_t^n$ . La définition formelle de  $\bar{Y}$  suit d'ailleurs la logique de la définition formelle de  $Y_t^n$ . On avait vu que  $Y_t^n$  est défini comme le niveau de la production qui est solution de l'équation (59).  $\bar{Y}$  est le niveau de la production qui est solution de l'équation

$$\bar{Y} = \left\{ \mathcal{M}_s(\bar{Y}, \bar{Y}, \bar{Y}; 0) \right\}^{-\sigma} \bar{Y} \quad (97)$$

(Preston 2005, p. 118). L'intuition de la relation entre  $Y_t^n$  et  $\bar{Y}$  est que les chocs  $\tilde{\varrho}_t$  induisent des variations de  $Y_t^n$  autour de sa valeur centrale  $\bar{Y}$ .

L'état stationnaire en question est également caractérisé par la parfaite stabilité des prix ( $P_t = P_{t-1} = p_t^* = P_t^* = \bar{P} \forall t$ , et donc  $\Pi_t = \bar{\Pi} = 1, \forall t$ ). On note cet état stationnaire  $(\Pi_t, Y_t, \mathcal{A}_t, \varrho_t, \mathbf{v}_t) = (1, \bar{Y}, 1, 0, 0)$ .

Le choix des niveaux de  $\Pi_t$  et  $Y_t$  à l'état stationnaire détermine celui de  $\bar{i}$ , i.e. le taux d'intérêt nominal associé à l'état stationnaire  $(1, \bar{Y}, 1, 0, 0)$ . On trouve effectivement

$$\bar{i} = \frac{1 - \beta}{\beta} \quad (98)$$

par insertion de  $(\Pi_t, Y_t, \varrho_t) = (1, \bar{Y}, 0)$  dans (83).<sup>8</sup>

L'état stationnaire  $(1, \bar{Y}, 1, 0, 0)$  est un équilibre en anticipations rationnelles du nouveau modèle keynésien avec prix rigides *et* du modèle avec prix flexibles. Pour vérifier cela, il suffit de remplacer dans les équations répertoriées dans les définitions 1 et 2  $\mathbf{v}_t$  et  $\varrho_t$  par 0,  $\mathcal{A}_t$  par 1,  $P_t, P_t^*, P_{t-1}$  et  $P_t(i)$  par  $\bar{P}$ ,  $i_t$  par  $\bar{i}$  et  $Y_t, y_t(i), y_t^*, Y_t^*$  et  $Y_t^n$  par  $\bar{Y}$ . On constate que ces équations sont alors systématiquement vérifiées. L'état stationnaire  $(1, \bar{Y}, 1, 0, 0)$  est effectivement une solution des systèmes décrits par les définitions 1 et 2.

### 3.2.2 Log-linéarisation autour de l'état stationnaire

Pour obtenir des expressions linéarisées des équations qui définissent l'équilibre en anticipations rationnelles, Woodford fait recours à la technique de la log-linéarisation autour de l'état stationnaire. Cette approche est pertinente dès que l'on suppose que  $\mathbf{v}_t$  et les différents chocs regroupés dans le vecteur  $\tilde{\varrho}_t$  soient de faible ampleur et induisent par conséquent des perturbations telles que le niveau de la production  $Y_t$  reste toujours proche de  $\bar{Y}$  et que le facteur d'inflation  $\Pi_t$  se situe au voisinage de  $\bar{\Pi}$  (ce qui revient à dire que l'inflation se maintient à proximité de zéro). Les variables agrégées endogènes  $P_t, Y_t$  et  $i_t$  fluctuent alors en permanence autour de leurs valeurs centrales  $\bar{P}, \bar{Y}$  et  $\bar{i}$ . Dans ces conditions, on peut approcher la dynamique des variables endogènes par des expressions qui associent le logarithme népérien des variables en question aux développements limités d'ordre 1 de Taylor autour de l'état stationnaire retenu (cette méthode est résumée ci-après sous l'appellation *approximation log-linéaire*) (cf. annexe A.7).

Le fait que les approximations log-linéaires des équations (66), (83), (92) et (94) soient établies par rapport à un état stationnaire avec parfaite stabilité des prix ( $\bar{\Pi} = 1$ ) n'empêche pas leur utilisation pour décrire les dynamiques des variables endogènes dans un contexte où la valeur centrale du facteur d'inflation  $\bar{\Pi}$  n'est pas exactement égale à 1. A condition que le

8. Dans le cadre plus général d'un état stationnaire  $(\bar{\Pi}, \bar{Y}, 1, 0, 0)$ , i.e. un état caractérisé par une inflation brute  $\bar{\Pi}$  qui n'est pas nécessairement égal à 1, on obtient

$$\bar{i} = \frac{\bar{\Pi} - \beta}{\beta}.$$

facteur d'inflation  $\Pi_t$  reste toujours suffisamment proche de 1, les approximations décrivent de manière satisfaisante le comportement des variables endogènes. Ceci implique notamment la possibilité d'analyser des situations où la politique monétaire parvient à faire en sorte que le facteur d'inflation fluctue autour d'une cible  $\Pi_t^*$  qui est légèrement plus grand que 1 (ce qui correspond à une cible d'inflation positive, mais proche de zéro) (Woodford (2003, p. 179); cf. Salle (2013) pour une revue de la littérature en français consacrée au ciblage d'inflation).

On remarque que ces approximations log-linéaires ne peuvent pas être mobilisées pour étudier des situations où  $\Pi_t$  s'éloigne *par définition* assez fortement du voisinage de 1 : déflation prononcée, inflation galopante et hyperinflation.

### 3.2.3 Dérivation de la relation IS

La première étape de la dérivation du modèle linéaire consiste dans l'établissement de l'approximation log-linéaire de l'équation (83). On remarque que l'on n'a pas besoin de disposer de versions linéarisées des équations (87) et (91) pour avoir une idée précise de leur signification : au voisinage de l'état stationnaire  $(1, \bar{Y}, 0, 0)$ , ces équations sont vérifiées de manière triviale.

La log-linéarisation de (83) permet de mettre en évidence une relation linéaire entre des *variables qui sont exprimées en déviation par rapport à l'état stationnaire*. Pour une variable  $\mathcal{X}_t$  quelconque (à l'exception toutefois du taux d'intérêt), cette variable en déviation est définie par  $\hat{\mathcal{X}}_t \equiv \ln\left(\frac{\mathcal{X}_t}{\bar{\mathcal{X}}}\right)$ , avec  $\bar{\mathcal{X}}$  la valeur constante de  $\mathcal{X}_t$  à l'état stationnaire. La relation linéaire que l'on peut établir entre ces variables permet une interprétation qui s'approche de l'intuition de la courbe IS de Hicks (1937).

Pour log-linéariser (83), on opère d'abord le changement de variable  $\mathfrak{k}_t \equiv 1 + i_t$ , qui implique  $\bar{\mathfrak{k}} \equiv 1 + \bar{i} = \frac{1}{\bar{\beta}}$ . On obtient alors l'approximation log-linéaire de (83)

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{k}} \left(1 + \ln\left(\frac{\mathfrak{k}_t}{\bar{\mathfrak{k}}}\right)\right) &= \frac{1}{\bar{\beta}} \left(1 + \ln\left(\frac{1 + i_t}{1 + \bar{i}}\right)\right) \\ &\simeq \frac{1}{\bar{\beta}} E_t \left\{ 1 + \pi_{t+1} + \frac{u_{cc}\bar{Y}}{u_c} (\hat{Y}_t - \hat{Y}_{t+1}) + \frac{u_{c\varrho}}{u_c} (\varrho_t(u) - \varrho_{t+1}(u)) \right\}, \end{aligned} \quad (99)$$

ou encore

$$\hat{i}_t \simeq E_t \left\{ \pi_{t+1} + \frac{u_{cc}\bar{Y}}{u_c} (\hat{Y}_t - \hat{Y}_{t+1}) + \frac{u_{c\varrho}}{u_c} (\varrho_t(u) - \varrho_{t+1}(u)) \right\}, \quad (100)$$

avec  $\hat{i}_t \equiv \ln\left(\frac{1+i_t}{1+\bar{i}}\right)$ ,  $\hat{Y}_t \equiv \ln\left(\frac{Y_t}{\bar{Y}}\right)$ ,  $\pi_t \equiv \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$  l'inflation (nette) entre les périodes  $t-1$  et  $t$ ,  $u_{cc} \equiv \frac{\partial u_c(\bar{C}; \bar{\varrho})}{\partial C} = \frac{\partial u_c(\bar{Y}; \bar{\varrho})}{\partial Y}$ ,  $u_c \equiv \frac{\partial u(\bar{C}; \bar{\varrho})}{\partial C} = \frac{\partial u(\bar{Y}; \bar{\varrho})}{\partial Y}$  et  $u_{c\varrho} \equiv \frac{\partial u_c(\bar{C}; \bar{\varrho})}{\partial \varrho} = \frac{\partial u_c(\bar{Y}; \bar{\varrho})}{\partial \varrho}$ . Pour  $i_t$  et  $\bar{i}$  proche de zéro, on a  $\ln\left(\frac{1+i_t}{1+\bar{i}}\right) \simeq i_t - \bar{i}$ , i.e.  $\hat{i}_t$  est une bonne approximation de l'écart entre le taux d'intérêt nominal courant et le taux d'intérêt nominal de long terme. Pour  $P_t$  proche de  $P_{t-1}$ , on a  $\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \simeq \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ , i.e. la variable  $\pi_t$  est une bonne approximation de la définition habituelle de l'inflation (le taux de croissance du niveau général des prix).

En définissant  $\phi \equiv -\frac{u_c}{u_{cc}\bar{Y}}$  et  $\mathfrak{g}_t \equiv -\frac{u_{c\varrho}}{\bar{Y}u_{cc}} \varrho_t(u)$  et en exploitant la linéarité de l'opérateur  $E_t$ , on peut réécrire (100) sous la forme :

$$\hat{i}_t \simeq E_t[\pi_{t+1}] + \phi^{-1} E_t[\hat{Y}_{t+1}] - \phi^{-1} \hat{Y}_t - \phi^{-1} E_t[\mathfrak{g}_{t+1}] + \phi^{-1} \mathfrak{g}_t, \quad (101)$$

ou encore, en isolant  $\hat{Y}_t$  :

$$\hat{Y}_t \simeq E_t[\hat{Y}_{t+1}] - \phi(\hat{i}_t - E_t[\pi_{t+1}]) + \mathfrak{g}_t - E_t[\mathfrak{g}_{t+1}]. \quad (102)$$

A ce stade, on introduit dans (102) l'écart de production  $x_t \equiv \hat{Y}_t - \hat{Y}_t^n$  avec  $\hat{Y}_t^n \equiv \ln\left(\frac{Y_t^n}{\bar{Y}}\right)$ , ce qui permet de remplacer  $\hat{Y}_t$  par  $x_t + \hat{Y}_t^n$  et  $\hat{Y}_{t+1}$  par  $x_{t+1} + \hat{Y}_{t+1}^n$ .<sup>9</sup> On obtient alors

$$x_t \simeq E_t[x_{t+1}] - \phi(\hat{i}_t - E_t[\pi_{t+1}]) + g_t, \quad (103)$$

avec  $g_t \equiv E_t[\hat{Y}_{t+1}^n] - \hat{Y}_t^n + \mathfrak{g}_t - E_t[\mathfrak{g}_{t+1}]$ . Exprimée sous forme d'une égalité (i.e. avec  $\simeq$  à la place de  $\simeq$ ), l'équation (103) correspond à la relation (IS) de Clarida et al. (1999). Woodford propose une expression équivalente à (103) qui fait apparaître le *taux d'intérêt naturel*. *Le taux d'intérêt naturel  $r_t^n$  est le taux d'intérêt que l'on observerait dans un contexte de parfaite flexibilité des prix et d'absence de l'inflation*. On obtient son expression formelle par l'intégration des égalités  $P_{t+1} = P_t$  et  $Y_t = Y_t^n \forall t$  dans le membre de droite de l'équation (83) :

$$1 + r_t^n \equiv \beta^{-1} E_t \left[ \frac{u_C(Y_t^n; \varrho_t)}{u_C(Y_{t+1}^n; \varrho_{t+1})} \right] \quad (104)$$

L'égalité  $Y_t = Y_t^n \forall t$  traduit l'hypothèse de la parfaite flexibilité des prix (cf. (59)), l'égalité  $P_{t+1} = P_t$  est forcément vérifiée dans un contexte d'absence d'inflation. Pour trouver la valeur constante que le taux d'intérêt naturel prend à l'état stationnaire  $(1, \bar{Y}, 1, 0, 0)$ , on insère  $(Y_t^n, \varrho_t) = (\bar{Y}, 0)$  dans le membre de droite de (104), ce qui donne :

$$\bar{r}^n = \frac{1 - \beta}{\beta}. \quad (105)$$

L'approximation log-linéaire de (104) autour de  $\bar{Y}$  et  $\bar{r}^n$  s'écrit :

$$\hat{r}_t^n \simeq \phi^{-1} \left\{ E_t[\hat{Y}_{t+1}^n] - \hat{Y}_t^n + \mathfrak{g}_t - E_t[\mathfrak{g}_{t+1}] \right\}, \quad (106)$$

avec  $\hat{r}_t^n \equiv \ln\left(\frac{1+r_t^n}{1+\bar{r}^n}\right)$ . Par conséquent, on peut réécrire (103) sous la forme

$$x_t \simeq E_t[x_{t+1}] - \phi(\hat{i}_t - E_t[\pi_{t+1}] - \hat{r}_t^n), \quad (107)$$

(cf. Woodford (2003, p. 246)).

L'équation (107) peut être interprétée comme une relation de type « IS », car elle décrit une relation *inverse* entre l'indice agrégé de la production  $Y_t$  et le taux d'intérêt réel ex ante  $\hat{r}_t \simeq \hat{i}_t - E_t[\pi_{t+1}]$  (cf. annexe A.8 pour la dérivation de cette approximation log-linéaire du taux d'intérêt réel). En effet, (107) est équivalente à

$$\ln Y_t \simeq \ln Y_t^n + E_t[x_{t+1}] - \phi(\hat{r}_t - \hat{r}_t^n) \quad (108)$$

et donc aussi à

$$Y_t \simeq \exp \{ \ln Y_t^n + E_t[x_{t+1}] - \phi(\hat{r}_t - \hat{r}_t^n) \}. \quad (109)$$

On obtient alors

$$\frac{\partial Y_t}{\partial \hat{r}_t} \simeq -\phi \exp \{ \ln Y_t^n + E_t[x_{t+1}] - \phi(\hat{r}_t - \hat{r}_t^n) \} < 0. \quad (110)$$

Woodford décrit la relation (83) comme le pendant de la courbe IS de Hicks dans un modèle d'équilibre général avec optimisation intertemporelle. En effet, cette relation permet de retrouver quelques intuitions centrales de la courbe IS :

9. Woodford (2003, p. 245) définit l'écart de production explicitement comme un écart logarithmique. On peut aussi interpréter  $x_t$  en termes d'une approximation logarithmique d'un écart de production défini comme la différence entre la production courante et la production naturel en pourcentage de la production naturelle. En effet, pour  $Y_t$  proche de  $Y_t^n$ , on a  $\ln Y_t - \ln Y_t^n \simeq \frac{Y_t - Y_t^n}{Y_t^n}$ .

" ... it determines the level of real aggregate demand associated with a given real interest rate, and then since output is demand determined in the present model, it determines the equilibrium level of output associated with a given real interest rate."  
(Woodford 2003, p. 242)

Cette affirmation fait de toute évidence abstraction du fait que les propriétés de l'opérateur  $E_t$  ne permettent pas de faire apparaître le taux d'intérêt réel dans l'équation non-linéaire (83). En revanche, elle est tout à fait pertinente pour caractériser les comportements décrits par les équations (107) et (109).

Il est intéressant de constater que les équations (103), (107) et (109) ont été construites à partir de la seule équation (83), qui fait partie du système qui décrit l'équilibre en anticipations rationnelles sous prix rigides *et* du système qui décrit l'équilibre en anticipations rationnelles sous prix flexibles. Par conséquent, *ces différentes expressions d'une relation de type IS sont vérifiées à la fois dans un environnement de prix rigides et dans un contexte de prix flexibles.*

Toutefois, le fait que  $Y_t$  soit systématiquement égal à  $Y_t^n$  dans un environnement de prix flexibles permet de simplifier ces équations : (107) devient ainsi

$$\hat{i}_t \simeq \hat{r}_t^n + E_t[\pi_{t+1}] \quad (111)$$

(Woodford 2003, p. 79). (111) s'interprète comme un cas particulier de la relation de Fisher impliquant le taux d'intérêt naturel  $\hat{r}_t^n$  (au lieu du taux d'intérêt réel  $\hat{r}_t$  qui caractérise l'expression habituelle de cette relation (Fisher 1930)).

### 3.2.4 Dérivation d'une règle de type Taylor

En log-linéarisant la règle de politique monétaire (92) autour de l'état stationnaire  $(1, \bar{Y}, 1, 0, 0)$ , on peut trouver une règle de politique monétaire qui généralise la règle classique de Taylor (1993).

Dans cette optique, on réécrit d'abord (92) sous la forme :

$$1 + i_t = \varphi(\Pi_t/\Pi_t^*, Y_t/Y_t^*, \mathbf{v}_t) + 1 \quad (112)$$

A l'état stationnaire  $(1, \bar{Y}, 1, 0, 0)$ , on a  $\Pi_t = \Pi_t^* = \bar{\Pi}$  et donc  $\left(\frac{\bar{\Pi}_t}{\bar{\Pi}_t^*}\right) = 1$  (Woodford 2003, p. 78 - 79). On a également  $Y_t = Y_t^* = \bar{Y}$ , ce qui implique que  $\left(\frac{\bar{Y}_t}{\bar{Y}_t^*}\right) = 1$ .

On remarque que le fait d'analyser le comportement de l'économie au voisinage de l'état stationnaire  $(1, \bar{Y}, 1, 0, 0)$  revient à se concentrer sur l'analyse des situations où la politique monétaire fonctionne assez bien, car les variables ciblées  $\Pi_t$  et  $Y_t$  sont supposées proches de leurs cibles  $Y_t^*$  et  $\Pi_t^*$ . Autrement dit, *le recours aux techniques de log-linéarisation exclut les éventuels échecs de la politique monétaire du champ d'analyse.*

On adapte maintenant les hypothèses concernant les propriétés des règles  $\varphi(P_t/P_t^*, \mathbf{v}_t)$  et  $\varphi(\Pi_t/\Pi_t^*, \mathbf{v}_t)$  qui sont pertinentes dans le cadre de l'économie de dotation du deuxième chapitre de Woodford (2003) ; en effet, Woodford suppose que ces deux règles vérifient  $\phi(1, 0) = \frac{\bar{\Pi} - \beta}{\beta}$ , respectivement  $\phi(1, 0) = \frac{1 - \beta}{\beta}$  (Woodford 2003, p. 78 et 90). Dans le contexte du nouveau modèle keynésien de base, il convient de supposer que la fonction de réaction non-linéaire des autorités monétaires (92) vérifie

$$\bar{i} \equiv \varphi(1, 1, 0) = \frac{1 - \beta}{\beta} \quad (113)$$

à l'état stationnaire  $(1, \bar{Y}, 1, 0, 0)$ .<sup>10</sup> On remarque que (113) est équivalent à (98), i.e. à l'état

10. Dans le cas plus général de l'état stationnaire  $(\bar{\Pi}, \bar{Y}, 1, 0, 0)$ , la fonction de réaction non-linéaire des autorités monétaires (92) vérifie

$$\bar{i} \equiv \varphi(\bar{\Pi}, 1, 0) = \frac{\bar{\Pi} - \beta}{\beta}.$$

stationnaire, les conditions de la demande de biens de consommations résumées par (98) sont parfaitement compatibles avec la politique monétaire mise en œuvre par les autorités monétaires.

Sous l'hypothèse (113), l'approximation log-linéaire de (92) s'écrit

$$\hat{i}_t \simeq \varphi_\pi(\pi_t - \pi_t^*) + \frac{\varphi_y}{4} \ln \left( \frac{Y_t}{Y_t^*} \right) + \mathbf{v}_t, \quad (114)$$

avec  $\varphi_\pi \equiv (1 - \beta) \frac{\partial \varphi(1,1,0)}{\partial \left( \frac{\pi_t}{\pi_t^*} \right)} \frac{1}{\varphi(1,1,0)} = \beta \frac{\partial \varphi(1,1,0)}{\partial \left( \frac{\pi_t}{\pi_t^*} \right)}$ ,  $\pi_t^* \equiv \ln \Pi_t^*$  et  $\varphi_y \equiv (1 - \beta) \frac{\partial \varphi(1,1,0)}{\partial \left( \frac{Y_t}{Y_t^*} \right)} \frac{1}{\varphi(1,1,0)} = \beta \frac{\partial \varphi(1,1,0)}{\partial \left( \frac{Y_t}{Y_t^*} \right)}$ .<sup>11</sup> On peut faire apparaître dans (114) l'écart de production  $x_t \equiv \hat{Y}_t - \hat{Y}_t^n = \ln Y_t - \ln Y_t^n$

et la valeur centrale de la cible d'inflation  $\bar{\pi}$ . On obtient ainsi

$$\hat{i}_t \simeq \varphi_\pi(\pi_t - \bar{\pi}) + \varphi_x x_t + \mathbf{w}_t, \quad (115)$$

avec  $\varphi_x \equiv \frac{\varphi_y}{4}$  et  $\mathbf{w}_t \equiv \mathbf{v}_t + \varphi_\pi(\bar{\pi} - \pi_t^*) + \varphi_x \ln \left( \frac{Y_t^n}{Y_t^*} \right)$ . Le terme  $\mathbf{w}_t$  regroupe différentes perturbations associées à la conduite de la politique monétaire : des erreurs de mesure et de contrôle ; des fluctuations de la cible d'inflation courante autour de la cible de long terme ; la présence d'un écart entre la cible de la production et son niveau naturel.

La règle linéaire (115) convient à la fois dans un contexte de prix rigides et de prix flexibles : en effet, (115) est une approximation log-linéaire de la règle (92) qui fait partie du système de l'équilibre en anticipations rationnelles sous prix rigides *et* du système de l'équilibre en anticipations rationnelles sous prix flexibles. Toutefois, on peut exploiter le fait que sous prix flexibles l'écart de production est toujours égal à zéro pour simplifier (115). On obtient alors sous l'hypothèse de la parfaite flexibilité des prix la règle linéaire :

$$\hat{i}_t \simeq \varphi_\pi(\pi_t - \bar{\pi}) + \mathbf{w}_t. \quad (116)$$

La règle de Taylor (1993) classique est un cas particulier de (115) caractérisé par  $\mathbf{w}_t = 0$ ,  $\bar{\pi} = 0.02$ ,  $\varphi_\pi = 1.5$ ,  $\varphi_x = 0.5$  et le taux d'intérêt réel à l'état stationnaire correspondant  $\bar{r} \equiv \bar{i} - \bar{\pi} = \frac{\bar{\pi} - \beta}{\beta} - \bar{\pi} = 0.02$ .<sup>12</sup>

Comme  $\ln \left( \frac{1 + \mathcal{X}_t}{1 + \bar{\mathcal{X}}} \right) \simeq \mathcal{X}_t - \bar{\mathcal{X}}$  pour des petites valeurs de  $\mathcal{X}_t$  et de  $\bar{\mathcal{X}}$ , on a  $\hat{i}_t \simeq i_t - \bar{i} = i_t - \frac{\bar{\pi} - \beta}{\beta}$ . On peut maintenant réécrire (115) :

$$i_t \simeq \pi_t + (\varphi_\pi - 1)(\pi_t - \bar{\pi}) + \varphi_x x_t + \bar{r}. \quad (117)$$

La substitution de  $\varphi_\pi$ ,  $\varphi_x$  et  $\bar{r}$  par 1.5, 0.5 et 0.02 donne l'expression

$$i_t \simeq \pi_t + 0.5(\pi_t - 0.02) + 0.5x_t + 0.02, \quad (118)$$

qui peut être assimilée à la règle de Taylor classique (cf. Taylor (1993) et Woodford (2003, p. 39)).

11. La division de  $\varphi_y$  par quatre est inhabituelle dans des règles de type Taylor. Elle s'explique par le fait que les règles de type Taylor sont normalement exprimées en termes d'un taux d'intérêt annualisé,  $4\hat{i}_t$ , et d'une mesure annualisée de l'inflation  $4\pi_t$  (cf. Woodford (2003, p. 245)) :

$$4\hat{i}_t \simeq \varphi_\pi(4\pi_t - 4\pi_t^*) + \varphi_y \ln \left( \frac{Y_t}{Y_t^*} \right).$$

Cette dernière équation est - au terme de perturbation  $\mathbf{v}_t$  près - équivalente à (114). La règle de Taylor (1993) classique retient l'inflation cumulée des quatre dernières périodes  $\ln \left( \frac{P_t}{P_{t-4}} \right)$  plutôt que l'inflation annualisée  $4\pi_t$  suggérée par Woodford.

12. Le fait que la règle non-linéaire est maintenant issue d'une log-linéarisation autour de  $(\bar{\pi}, \bar{Y}, 1, 0, 0)$  implique que les coefficients ne sont plus définis de la même manière que dans le cas d'une log-linéarisation autour de  $(1, \bar{Y}, 1, 0, 0)$ . On a maintenant  $\varphi_\pi \equiv \frac{\bar{\pi} - \beta}{\beta} \frac{\partial \varphi(1,1,0)}{\partial \left( \frac{\pi_t}{\pi_t^*} \right)} \frac{1}{\varphi(1,1,0)}$  et  $\varphi_x \equiv \frac{\bar{\pi} - \beta}{4\beta} \frac{\partial \varphi(1,1,0)}{\partial \left( \frac{Y_t}{Y_t^*} \right)} \frac{1}{\varphi(1,1,0)}$ .

### 3.2.5 Dérivation de la nouvelle courbe de Phillips

Par log-linéarisation autour de l'état stationnaire  $(1, \bar{Y}, 1, 0, 0)$  des deux équations (66) et (94) qui font partie du système qui décrit l'équilibre en anticipations rationnelles *sous prix rigides* (mais pas du système associé à un contexte de flexibilité des prix), on obtient une relation qui peut être interprétée comme « nouvelle courbe de Phillips », i.e. comme une courbe de Phillips « augmentée des anticipations » (*expectations-augmented Phillips curve*, cf. Phelps (1967) et Friedman (1968)).

Pour linéariser (66), on commence par réécrire l'équation (66) sous la forme

$$f(P_t) = (1 - \vartheta)f(p_t^*) + \vartheta f(P_{t-1}), \quad (119)$$

avec  $f(\mathcal{X}_t) = \mathcal{X}_t^{1-\sigma}$ . L'approximation log-linéaire de (119) autour de  $\bar{P}$  est alors donnée par

$$\begin{aligned} f(\bar{P})[1 + \epsilon_p(\ln P_t - \ln \bar{P})] &\simeq \\ (1 - \vartheta)f(\bar{P})[1 + \epsilon_p(\ln p_t^* - \ln \bar{P})] + \vartheta f(\bar{P})[1 + \epsilon_p(\ln P_{t-1} - \ln \bar{P})], \end{aligned} \quad (120)$$

avec  $\epsilon_p \equiv \frac{f(\bar{P})}{d\bar{P}} \frac{\bar{P}}{f(\bar{P})}$ , qui devient, après simplification,

$$\ln P_t \simeq (1 - \vartheta) \ln p_t^* + \vartheta \ln P_{t-1}. \quad (121)$$

En soustrayant  $\ln P_t$  des membres de gauche et de droite de l'équation (121) on obtient

$$\pi_t \simeq \frac{1 - \vartheta}{\vartheta} \hat{p}_t^*, \quad (122)$$

avec  $\hat{p}_t^* \equiv \ln \left( \frac{p_t^*}{\bar{P}} \right)$  le logarithme népérien du prix relatif retenu par les firmes qui modifient leur prix en  $t$ . L'équation (122) servira dans la suite du raisonnement pour remplacer  $\hat{p}_t^*$ .

Concernant la log-linéarisation de (94), on y remplace toutes les fonctions et variables par leur approximation log-linéaire autour de  $(1, \bar{Y}, 1, 0, 0)$ . Ensuite, on divise les membres de gauche et de droite de l'équation par le terme  $u_c(\bar{Y})\bar{P}^{-1}$ , ce qui permet de trouver

$$\sum_{T=t}^{\infty} (\vartheta\beta)^{T-t} E_t \left[ \ln p_t^* - \ln P_T - \left\{ \epsilon_{uc}(\hat{Y}_T - \hat{Y}_T^n) + (\epsilon_{vh} + \epsilon_{\psi})(\hat{y}_T^* - \hat{Y}_T^n) \right\} \right] \simeq 0 \quad (123)$$

avec  $\epsilon_{uc} \equiv -\frac{\partial u_c(\bar{Y})}{\partial Y} \frac{\bar{Y}}{u_c(\bar{Y})}$ ,  $\epsilon_{vh} \equiv \frac{\partial v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))}{\partial Y} \frac{\bar{Y}}{v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))}$  et  $\epsilon_{\psi} \equiv \frac{d\Psi(\bar{Y})}{dY} \frac{\bar{Y}}{\Psi(\bar{Y})}$ . Comme par ailleurs la fonction de demande qui s'adresse aux producteurs qui appliquent à la période  $T$  le prix  $p_t^*$  est donnée par

$$y_T^* = \left( \frac{p_t^*}{P_T} \right)^{-\sigma} Y_T \quad (124)$$

on peut substituer le terme  $\hat{Y}_T - \sigma(\ln p_t^* - \ln P_T)$  à  $\hat{y}_T^*$ , ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{T=t}^{\infty} (\vartheta\beta)^{T-t} E_t \left[ (\ln p_t^* - \ln P_T)(1 + \sigma(\epsilon_{vh} + \epsilon_{\psi})) - \left\{ (\epsilon_{uc} + \epsilon_{vh} + \epsilon_{\psi})(\hat{Y}_T - \hat{Y}_T^n) \right\} \right] \\ \simeq 0 \end{aligned} \quad (125)$$

ou encore, après division des termes de gauche et de droite de (125) par le terme  $(1 + \sigma(\epsilon_{vh} + \epsilon_{\psi}))$ ,

$$\sum_{T=t}^{\infty} (\vartheta\beta)^{T-t} E_t [\ln p_t^* - \ln P_T - \epsilon_Y x_T] \simeq 0, \quad (126)$$

avec  $\epsilon_Y \equiv \frac{\epsilon_{uc} + \epsilon_{vh} + \epsilon_{\psi}}{1 + \sigma(\epsilon_{vh} + \epsilon_{\psi})} > 0$  et  $x_T \equiv \ln\left(\frac{Y_T}{\bar{Y}}\right) - \ln\left(\frac{Y_T^n}{\bar{Y}}\right) = \ln Y_T - \ln Y_T^n$  l'écart de production à la période  $T$ . La stricte positivité du paramètre  $\epsilon_Y$  s'explique par les propriétés des fonctions  $u(\cdot)$ ,  $v(\cdot)$  et de la fonction de production  $f(\cdot)$  : le fait que  $u(\cdot)$  soit une fonction croissante concave implique que  $\epsilon_{uc} \equiv -\frac{\partial u_c(\bar{Y})}{\partial \bar{Y}} \frac{\bar{Y}}{u_c(\bar{Y})} > 0$ ;  $v(\cdot)$  est une fonction croissante convexe positive et  $f^{-1}(\cdot)$  est croissante convexe positive sur  $[0, +\infty]$ ; la fonction composée  $v(f^{-1}(\cdot))$  est par conséquent croissante convexe sur  $[0, +\infty]$ , c'est pourquoi  $\epsilon_{vh} \equiv \frac{\partial v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))}{\partial \bar{Y}} \frac{\bar{Y}}{v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))} > 0$ ;  $\Psi(\cdot)$  est une fonction croissante et positive, ce qui implique  $\epsilon_{\psi} \equiv \frac{d\Psi(\bar{Y})}{d\bar{Y}} \frac{\bar{Y}}{\Psi(\bar{Y})} > 0$ . Dans ces conditions,  $\epsilon_Y$  est strictement positif.

En isolant  $\ln p_t^*$  et en soustrayant  $\ln P_t$  des membres de gauche et de droite de l'équation (126), on trouve

$$\hat{p}_t^* \simeq (1 - \vartheta\beta) \sum_{T=t}^{\infty} (\vartheta\beta)^{T-t} E_t \left[ \sum_{s=t+1}^T \pi_s + \epsilon_Y x_T \right], \quad (127)$$

ou encore

$$\hat{p}_t^* \simeq \sum_{T=t}^{\infty} (\vartheta\beta)^{T-t} E_t [\vartheta\beta\pi_{T+1} + (1 - \vartheta\beta) \epsilon_Y x_T]. \quad (128)$$

En mobilisant la loi des espérances itérées ( $E_t[E_{t+1}[\mathcal{X}]] = E_t[\mathcal{X}]$ ) on trouve l'expression

$$\hat{p}_t^* \simeq (\vartheta\beta E_t[\pi_{t+1}] + (1 - \vartheta\beta) \epsilon_Y x_t) + \vartheta\beta E_t[\hat{p}_{t+1}^*], \quad (129)$$

qui est équivalente à l'équation (128). On peut effectivement exprimer l'équation (129) pour la période  $t + 1$ , ce qui permet de remplacer  $\hat{p}_{t+1}^*$  dans le dernier terme de (129). On obtient ainsi une nouvelle équation dont le dernier terme comporte la variable  $\hat{p}_{t+2}^*$ , que l'on remplace maintenant par (129) exprimée à la période  $t + 2$ , etc. En effectuant ces remplacements successifs, on obtient l'équation (128).

On remplace maintenant, d'après l'équation (122), dans (129)  $\hat{p}_t^*$  et  $\hat{p}_{t+1}^*$  par  $\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\pi_t$  et  $\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\pi_{t+1}$ , ce qui permet de trouver

$$\pi_t \simeq \beta E_t[\pi_{t+1}] + \lambda x_t \quad (130)$$

avec  $\lambda \equiv \frac{(1-\vartheta)(1-\vartheta\beta)}{\vartheta} \epsilon_Y > 0$ .

L'équation (130) permet une interprétation en termes d'une *courbe de Phillips augmentée des anticipations*. Pour voir cela, il suffit de réécrire (130) sous la forme

$$\pi_t \simeq \beta E_t[\pi_{t+1}] + \lambda(\hat{Y}_t - \hat{Y}_t^n), \quad (131)$$

ce qui montre que l'inflation est positivement corrélée avec le niveau de la production et avec l'inflation anticipée :

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial \hat{Y}_t} \simeq \lambda > 0. \quad (132)$$

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial E_t[\pi_{t+1}]} \simeq \beta > 0. \quad (133)$$

La nouvelle courbe de Phillips (130) n'est vérifiée que dans un environnement de prix rigides. En effet, les équations (66) et (94) ne font pas partie du système qui définit l'équilibre en anticipations rationnelles sous prix flexibles. Dans un contexte de parfaite flexibilité des prix, les dynamiques des prix et des quantités produites sont exprimées par l'équation linéaire (95) ( $P_t = p_t^*$ ) et par le fait que l'écart de production est nécessairement égal à zéro ( $x_t = 0$ ), car on a toujours  $Y_t = Y_t^n$  (cf. équation (96)).

**Introduction d'un choc additif dans la courbe de Phillips** En regroupant les trois équations linéarisées (107), (130) et (115), dont la dérivation vient d'être discutée dans cette sous-section, on trouve le système :

$$x_t \simeq E_t[x_{t+1}] - \phi(\hat{i}_t - E_t[\pi_{t+1}] - \hat{r}_t^n) \quad (107)$$

$$\pi_t \simeq \beta E_t[\pi_{t+1}] + \lambda x_t \quad (130)$$

$$\hat{i}_t \simeq \varphi_\pi(\pi_t - \bar{\pi}) + \varphi_x x_t + \mathbf{w}_t. \quad (115)$$

Ce système correspond à la version linéarisée du nouveau modèle keynésien de base de Woodford.

Malgré la place centrale que ce modèle linéaire occupe dans l'ouvrage de Woodford (2003), la plupart des études normatives des règles de politique monétaire dans le nouveau modèle keynésien se situent dans un cadre légèrement différent : la courbe de Phillips retenue dans ces études s'écrit

$$\pi_t \simeq \lambda x_t + \beta E_t[\pi_{t+1}] + u_t \quad (134)$$

(cf. par exemple Clarida et al. (1999)).

La différence entre les deux expressions de la courbe de Phillips réside dans le fait que (130) soit dépourvue de tout choc additif. Il s'agit là d'une situation très confortable pour les autorités monétaires, car les deux objectifs de la politique monétaire sont systématiquement conciliables : en absence d'un choc additif, la stabilisation de l'écart de production est le meilleur moyen pour assurer la stabilisation de l'inflation. En effet, avec (130), l'inflation est essentiellement un phénomène provoqué par un écart de production positif, i.e. par un niveau de production qui se situe au-dessus de son niveau naturel. Dans ces conditions, les autorités monétaires peuvent se contenter de mettre en place une politique monétaire qui vise à stabiliser l'écart de production, i.e. de le ramener à zéro ; *la stabilisation de l'écart de production implique à son tour celle de l'inflation*. La situation est bien différente en présence de la courbe (134) : l'introduction du choc additif  $u_t$  peut maintenant provoquer des configurations où l'on observe simultanément une inflation négative (déflation) et un écart de production positif. Une politique monétaire visant à stabiliser l'écart de production aurait dans ces conditions la fâcheuse conséquence d'accentuer encore la déflation. *Les autorités monétaires doivent alors arbitrer entre stabilisation de l'inflation et stabilisation de l'écart de production*.

Pour pouvoir analyser cet arbitrage, il semble important de disposer d'un modèle dont la courbe de Phillips est caractérisée par la présence d'un choc additif. Cette sous-section présente deux méthodes qui permettent d'introduire un tel choc.

**La proposition de Woodford : Variations dans l'élasticité de substitution** Woodford (2003, p. 450) propose des variations dans l'élasticité de substitution  $\sigma$  comme fondement microéconomique d'un choc sur les coûts. L'intuition économique de ces variations est un changement dans la perception des ménages concernant la substituabilité entre les biens différenciés produits par les firmes. Lorsque  $\sigma$  augmente, les ménages sont plus disposés à substituer un bien par un autre, faisant en sorte que le pouvoir de marché des firmes diminue. La conséquence directe de cette augmentation est une diminution de la marge  $\mathcal{M}$ , qui cesse alors d'être une constante. Pour tenir compte de ce changement de statut, il convient de doter la marge d'un indice temporel :  $\mathcal{M}_t$ .

L'introduction d'une marge qui fluctue au cours du temps ne modifie pas l'expression linéarisée de la courbe de Phillips, on trouve toujours

$$\pi_t \simeq \beta E_t[\pi_{t+1}] + \lambda x_t, \quad (130)$$

(cf. Woodford (2003, p. 450)). Grâce à la notion du « niveau de production efficient »  $Y_t^e$ , i.e. le niveau de production qui maximise l'utilité des ménages, il est maintenant possible de faire

apparaître dans (130) un choc additif  $u_t$ . Pour cela, il convient d'exprimer la production naturelle  $Y_t^n$  en fonction de la production *efficente*  $Y_t^e$ , puis de définir une courbe de Phillips alternative qui établit une relation entre la inflation  $\pi_t$  et l'écart de production *efficient*  $x_t^e \equiv \ln Y_t - \ln Y_t^e$ .

Le raisonnement est le suivant. En présence d'une marge fluctuante, le prix relatif de la firme  $i$  s'écrit (cf. équation (54)) :

$$\frac{p_t(i)}{P_t} = \mathcal{M}_t s(y_t(i), y_t(I), Y_t; \tilde{\varrho}_t). \quad (135)$$

Au niveau naturel de la production, toutes les firmes produisent la même quantité  $Y_t^n$  et fixent un prix identique, faisant en sorte que le prix relatif devient 1. On obtient alors

$$\mathcal{M}_t s(Y_t^n, Y_t^n, Y_t^n; \tilde{\varrho}_t) = 1. \quad (136)$$

Le niveau de production  $Y_t^e$  qui maximise l'utilité des ménages doit être tel que l'utilité associée à la consommation du dernier bien est égale à la désutilité du travail qui a été nécessaire pour le produire. On a donc :

$$v_h(h_t^e(I); \varrho_t) = u_c(C_t^e; \varrho_t), \quad (137)$$

avec  $h_t^e(I)$  et  $C_t^e$  les quantités de travail et de consommation associée au niveau de production *efficient*. En utilisant l'égalité  $C_t = Y_t$  et la réciproque de la fonction de production (41), l'équation (137) devient

$$\frac{v_h(f^{-1}(Y_t^e/\mathcal{A}_t); \varrho_t)}{u_C(Y_t^e; \varrho_t) \mathcal{A}_t} \times \Psi(Y_t^e/\mathcal{A}_t) = 1 \quad (138)$$

ou encore

$$s(Y_t^e, Y_t^e, Y_t^e; \tilde{\varrho}_t) = 1. \quad (139)$$

Comme les membres de droite des équations (136) et (139) sont identiques, on peut maintenant écrire :

$$\mathcal{M}_t s(Y_t^n, Y_t^n, Y_t^n; \tilde{\varrho}_t) = s(Y_t^e, Y_t^e, Y_t^e; \tilde{\varrho}_t) \quad (140)$$

On log-linéarise ensuite (140) autour d'un état stationnaire défini par  $Y_t = \bar{Y}$  et  $\mathcal{M}_t = \bar{\mathcal{M}} = 1$ ; rigoureusement, il serait certes préférable de retenir  $\bar{\mathcal{M}} > 1$ , mais l'approximation log-linéaire reste acceptable lorsqu'on suppose que les fluctuations de la marge  $\mathcal{M}_t$  ne s'éloignent pas trop fortement de 1. On trouve alors :

$$\ln Y_t^n \simeq \ln Y_t^e - \frac{1}{\epsilon_{uc} + \epsilon_{vh} + \epsilon_{\psi}} \ln \mathcal{M}_t. \quad (141)$$

L'équation (141) montre que la production naturelle est inférieure à la production *efficiente*, car  $\frac{1}{\epsilon_{uc} + \epsilon_{vh} + \epsilon_{\psi}} \ln \mathcal{M}_t > 0$ . Ceci n'est guère surprenant : dans un contexte de concurrence monopolistique, la maximisation du profit de firmes se traduit par un niveau de production qui est inférieur à l'optimum social  $Y_t^e$ .

On peut maintenant remplacer dans (130)  $\ln Y_t^n$  par  $\ln Y_t^e - \frac{1}{\epsilon_{uc} + \epsilon_{vh} + \epsilon_{\psi}} \ln \mathcal{M}_t$ , ce qui donne

$$\pi_t \simeq \beta E_t[\pi_{t+1}] + \lambda x_t^e + u_t, \quad (142)$$

avec  $u_t \equiv \frac{\lambda}{\epsilon_{uc} + \epsilon_{vh} + \epsilon_{\psi}} \ln \mathcal{M}_t$ .

**La proposition de Clarida, Galí et Gertler : fluctuations dans la proportionnalité entre le coût marginal réel et l'écart de production** Clarida, Galí et Gertler interprètent le choc sur le coût comme conséquence de l'instabilité de la relation de proportionnalité entre le coût marginal réel et l'écart de production.<sup>13</sup>

"The relation for inflation that evolves from the Calvo model takes the form

$$\pi_t = \beta E_t \{\pi_{t+1}\} + \delta mc_t$$

where  $mc_t$  denotes the deviation of (real) marginal cost from its steady state value. To then relate inflation to the output gap, the literature typically makes assumptions on technology, preferences, and the structure of labor markets to justify a proportionate relation between real marginal cost and the output gap, so that  $mc_t = \kappa x_t$  holds, where  $\kappa$  is the output elasticity of real marginal cost. (...) In this context, the disturbance  $u_t$  is interpretable as reflecting deviations from the condition  $mc_t = \kappa x_t$ ." (Clarida et al. 1999, p. 1667)

Dans la présentation du nouveau modèle keynésien de Woodford (2003), une telle relation de proportionnalité entre le coût marginal réel et l'écart de production n'est pas directement visible. On peut la mettre en évidence dans la log-linéarisation de l'équation (94). En effet, le terme

$$\frac{v_h(f^{-1}(y_T^*/\mathcal{A}_T); \varrho_T)}{u_C(Y_T; \varrho_T) \mathcal{A}_T} \times \frac{d(f^{-1}(y_T^*/\mathcal{A}_T))}{d(y_T^*/\mathcal{A}_T)}$$

$$\frac{v_h(f^{-1}(Y_T^n/\mathcal{A}_T); \varrho_T)}{u_C(Y_T^n; \varrho_T) \mathcal{A}_T} \times \frac{d(f^{-1}(Y_T^n/\mathcal{A}_T))}{d(Y_T^n/\mathcal{A}_T)}$$

correspond justement à la déviation entre le coût marginal réel et sa valeur à l'état stationnaire, noté  $mc_t$  par Clarida, Galí et Gertler. On peut alors écrire :

$$mc_T \simeq \epsilon_{uc}(\hat{Y}_T - \hat{Y}_T^n) + (\epsilon_{vh} + \epsilon_{\psi})(\hat{y}_T^* - \hat{Y}_T^n) \quad (143)$$

ou encore, en substituant  $\hat{Y}_T - \sigma(\ln p_t^* - \ln P_T)$  à  $\hat{y}_T^*$  (cf. équation (125)) :

$$mc_T \simeq (\epsilon_{uc} + \epsilon_{vh} + \epsilon_{\psi})x_T - \sigma(\epsilon_{vh} + \epsilon_{\psi})(\ln p_t^* - \ln P_T) \quad (144)$$

Dans (144), le facteur de proportionnalité dont parlent Clarida, Galí et Gertler (leur paramètre  $\kappa$ ) correspond à  $\epsilon_{uc} + \epsilon_{vh} + \epsilon_{\psi}$ . On peut représenter les déviations par rapport à la condition de proportionnalité  $mc_T = (\epsilon_{uc} + \epsilon_{vh} + \epsilon_{\psi})x_T$  sous forme d'un terme stochastique  $u_T$  :

$$mc_T \simeq (\epsilon_{uc} + \epsilon_{vh} + \epsilon_{\psi})x_T + u_T - \sigma(\epsilon_{vh} + \epsilon_{\psi})(\ln p_t^* - \ln P_T). \quad (145)$$

En poursuivant la dérivation de la courbe de Phillips de la même manière que dans la sous-section 3.2.5 (cf. les équations (123) à (130)), on obtient

$$\pi_t \simeq \beta E_t[\pi_{t+1}] + \lambda x_t + u_t \quad (134)$$

avec  $u_t \equiv \frac{(1-\vartheta)(1-\vartheta\beta)}{\vartheta(1+\sigma(\epsilon_{vh}+\epsilon_{\psi}))} u_t$ .

La définition de l'état stationnaire doit maintenant tenir compte de la présence d'un processus de perturbation supplémentaire dans le modèle : à l'état stationnaire déterministe,  $u_t$  doit être égal à zéro. On a donc  $(\Pi_t, Y_t, \mathcal{A}_t, \varrho_t, v_t, u_t) = (1, \bar{Y}, 1, 0, 0, 0)$ .

L'intuition économique que Clarida, Galí et Gertler donnent au terme de perturbation  $u_t$  n'est pas tout à fait compatible avec la vision Woodfordienne du nouveau modèle keynésien :

13. Les paramètres  $\delta$  et  $\kappa$  mentionnés dans la citation qui suit ne correspondent pas aux paramètres  $\delta$  et  $\kappa$  utilisés dans le présent document.

"Deviations from this proportionality condition could be caused, for example, by movements in nominal wages that push real wages away from their 'equilibrium' values due to frictions in the wage contracting process." (Clarida et al. 1999, p. 1667)

En effet, on a vu dans la section 2 que Woodford situe son analyse dans un contexte de parfaite flexibilité des salaires, i.e. dans un univers où le processus de détermination des salaires n'est justement pas affecté par des frictions.

Malgré le fait que la lecture de Woodford du choc sur les coûts s'accorde mieux avec la dérivation du nouveau modèle keynésien telle qu'elle a été présentée ici, la suite du présent document retiendra la courbe de Phillips linéaire (134) issue de la proposition de Clarida, Galí et Gertler. Ce choix s'explique par le fait que la littérature présente généralement la variable  $x_t$  comme l'écart de production, elle ne fait pratiquement *jamaïs* référence à l'écart de production *efficient* qui caractérise la courbe de Phillips (142) dérivée sous la proposition de Woodford.

Dans cette perspective, on retient à partir de maintenant le système

$$x_t \simeq E_t[x_{t+1}] - \phi(\hat{i}_t - E_t[\pi_{t+1}] - \hat{r}_t^n) \quad (IS)$$

$$\pi_t \simeq \lambda x_t + \beta E_t[\pi_{t+1}] + u_t. \quad (CP)$$

$$\hat{i}_t \simeq \varphi_\pi(\pi_t - \bar{\pi}) + \varphi_x x_t + w_t. \quad (RT)$$

comme version linéarisée du nouveau modèle keynésien dans un contexte de rigidité des prix. Le système

$$x_t \simeq 0 \quad (146)$$

$$\hat{i}_t \simeq \hat{r}_t^n + E_t[\pi_{t+1}] \quad (111)$$

$$\hat{i}_t \simeq \varphi_\pi(\pi_t - \bar{\pi}) + w_t. \quad (116)$$

décrit à son tour la version linéarisée du nouveau modèle keynésien qui est adaptée à un environnement de prix flexibles. On retient dans ce dernier système l'équation (146), qui provient du modèle de base de Woodford (2003), i.e. d'un modèle caractérisé par l'absence du choc  $u_t$ . Ce choix s'explique par le fait que la relation de proportionnalité entre  $mc_t$  et  $x_t$  ne peut pas être utilisée dans un contexte de prix flexibles dans la mesure où  $x_t = 0 \forall t$ . Dans ces conditions,  $u_t$  n'a plus de signification théorique, car ce choc représente justement des déviations par rapport à cette relation de proportionnalité (Clarida et al. 1999).

## 4 Le fonctionnement du modèle

### 4.1 Chocs et déviations autour de l'état stationnaire

A partir du moment où l'on a défini un état stationnaire *déterministe*, la survenance d'un choc *aléatoire* a pour conséquence l'apparition d'un écart par rapport à cet état stationnaire. Dans cette perspective, le nouveau modèle keynésien linéarisé (IS) - (CP) - (RT) est destiné à l'analyse *locale* du comportement de l'économie au voisinage de l'état stationnaire. Plus précisément, il est censé décrire et expliquer comment et pourquoi les principales variables endogènes  $x_t$ ,  $\pi_t$  et  $\hat{i}_t$  fluctuent autour de leurs valeurs à l'état stationnaire  $(0, 0, 0)$  et quel rôle joue la politique monétaire à cet égard.<sup>14</sup>

14. On appelle ici et dans la suite *variables endogènes principales* les variables endogènes qui apparaissent de manière explicite dans le modèle linéarisé (IS), (CP) et (RT), en l'occurrence  $x_t$ ,  $\pi_t$  et  $\hat{i}_t$ . Les variables endogènes qui n'apparaissent pas explicitement dans le modèle, comme par exemple  $\hat{Y}_t^n$ , sont appelées *variables endogènes secondaires*. Bizarrement, Woodford (2003, p. 395) classe  $\hat{Y}_t^n$  parmi les variables exogènes du nouveau modèle keynésien de base, alors même que sa valeur est déterminée par le modèle et non donnée par un processus extérieur au modèle.

Le fait que  $x_t$ ,  $\pi_t$  et  $\hat{i}_t$  prennent à l'état stationnaire les valeurs  $(0, 0, 0)$  s'explique de la manière suivante : cet état est caractérisé par  $Y_t = Y_t^n = \bar{Y}$ , ce qui implique zéro comme valeur de  $x_t$  à l'état stationnaire déterministe, car  $x_t \equiv \ln\left(\frac{Y_t}{\bar{Y}}\right) - \ln\left(\frac{Y_t^n}{\bar{Y}}\right)$ . Zéro est également la valeur de l'inflation  $\pi_t \equiv \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$  à l'état stationnaire, car à cet état, on a  $\frac{P_t}{P_{t-1}} = 1$  et  $\ln 1 = 0$ . Finalement, la valeur à l'état stationnaire de  $i_t$  est égale à  $\bar{i} = \frac{1-\beta}{\beta}$ . Comme  $\hat{i}_t \equiv \ln\left(\frac{1+i_t}{1+\bar{i}}\right)$ , on obtient  $\ln 1 = 0$  comme valeur de  $\hat{i}_t$  à l'état stationnaire.

Cette sous-section présente les différents chocs et leur manière de se propager dans le modèle. Cette présentation ne sera pas organisée autour de la dichotomie habituelle entre *chocs d'offre* et *chocs de demande*, qui est plutôt une source de confusion dans le nouveau modèle keynésien. En effet, un lecteur ayant assimilé ce modèle d'une manière quelque peu superficielle pourrait être tenté d'interpréter  $u_t$  comme choc d'offre et  $\hat{r}_t^n$  comme choc de demande. A priori, une telle lecture peut paraître plausible : le choc  $\hat{r}_t^n$  se situe dans l'équation (*IS*), qui est habituellement présentée comme relation de type IS au sens de Hicks (1937) (Woodford 2003, p. 246), et  $u_t$  intervient dans l'équation (*CP*), censée traduire les conditions de l'offre (Woodford 2003, p. 187). Néanmoins, l'identification de  $\hat{r}_t^n$  comme choc de demande est discutable :

*"The variable is evidently thought of as a demand shock because it is the disturbance term in the Euler equation (...). But because this condition has been written in terms of the output gap  $x_t$  rather than the level of output  $\hat{Y}_t$ , the composite disturbance  $\hat{r}_t^n$  (...) cannot properly be regarded as a pure demand shock, if one supposes the occurrence of transitory disturbances to the natural rate of output."* (Woodford 2003, p. 250)

Toute modification de  $\hat{Y}_t^n$  implique effectivement des variations de  $\hat{r}_t^n$  ( cf. (106)). Dans la mesure où des modifications de  $\hat{Y}_t^n$  s'interprètent comme des chocs d'offre, on peut difficilement assimiler  $\hat{r}_t^n$  à un choc de demande.

Dans ces conditions, la dichotomie chocs d'offre vs. chocs de demande est à manipuler avec la plus grande précaution, et je m'en éloigne ici délibérément. Je me contente d'un inventaire complet de l'ensemble de chocs susceptibles de se produire dans le nouveau modèle keynésien. Dans cette optique, la présente sous-section a comme objet d'étudier de manière détaillée comment chacun de ces chocs provoque des déviations de l'économie par rapport à l'état stationnaire déterministe. Si je parle dans la suite de « déviations », de « modifications » ou de « variations » des variables, il est sous-entendu qu'il s'agit chaque fois de déviations, modifications et variations par rapport aux valeurs associées à cet état stationnaire.

#### 4.1.1 Inventaire des chocs dans le modèle non-linéaire

Le modèle non-linéaire présenté dans la sections 2 et dans la sous-section 3.1 comporte les processus de perturbation suivants :

- (a) le processus  $\varrho_t(u)$  qui affecte la fonction de l'utilité de la consommation  $u(\cdot)$ ,
- (b) le processus  $\varrho_t(v)$  qui affecte la fonction de la désutilité du travail  $v(\cdot)$ ,
- (c) le processus qui détermine le niveau technique  $\mathcal{A}_t$ ,
- (d) le processus  $u_t$  qui affecte la relation de proportionnalité entre  $mc_t$  et  $x_t$ .
- (e) le processus  $v_t$  qui affecte la règle de politique monétaire  $\varphi(\cdot)$ .

Les processus  $\varrho_t(u)$ ,  $\varrho_t(v)$  et  $\mathcal{A}_t$  sont regroupés dans le vecteur  $\bar{\varrho}_t$ . Ce regroupement n'a pas été proposé par hasard, car ces trois processus sont des *perturbations réelles* (Woodford 2003, p. 64). On verra que l'effet exercé par ces chocs sur les variables endogènes principales passe nécessairement par une modification du niveau naturel de la production et du taux d'intérêt. En revanche, les chocs  $u_t$  et  $v_t$  sont caractérisés par le fait qu'ils parviennent d'éloigner les variables principales endogènes des leurs valeurs à l'état stationnaire sans d'affecter les variables naturelles.

Pour illustrer cela, la suite de cette sous-section présente l'intégralité des étapes et mécanismes qui se situent entre la survenance d'un choc et la modification finale des variables endogènes principales. On parlera à ce sujet de la « propagation des chocs aux variables endogènes principales ». Le raisonnement se fait pour une *règle de politique monétaire donnée* : on suppose que les autorités monétaires utilisent la règle (*RT*). Dans un souci de concentration sur le mécanisme spécifique à chaque type de choc, on neutralise l'influence des autres perturbations : pour analyser les processus  $\varrho_t(u)$ ,  $\varrho_t(v)$  et  $\mathcal{A}_t$ , on suppose  $u_t = v_t = 0$  ; l'analyse de  $u_t$  se fera pour  $\varrho_t(u) = \varrho_t(v) = v_t = 0$  et  $\mathcal{A}_t = 1$ , et celle de  $v_t$  sous l'hypothèse que  $\varrho_t(u) = \varrho_t(v) = u_t = 0$  et  $\mathcal{A}_t = 1$

#### 4.1.2 La propagation des chocs aux variables endogènes

**La propagation des perturbations réelles** L'impact des chocs réels se propage aux variables endogènes principales par les variables naturelles qui jouent un rôle de « variables de relais » : exposées aux chocs *contemporains* regroupés dans  $\tilde{\varrho}$ , les valeurs des variables naturelles se modifient, et ces modifications se transmettent aux variables endogènes principales. Un deuxième mécanisme de propagation implique les anticipations des chocs réels futurs : ces anticipations exercent un impact sur les variables endogènes principales par l'intermédiaire des anticipations des variables naturelles.

La figure 1 présente l'ensemble des mécanismes à l'œuvre dans la propagation des perturbations réelles ; elle met en évidence le rôle central des variables naturelles, car les variables endogènes principales du modèle sont reliées aux chocs  $\tilde{\varrho}_t$  par l'intermédiaire des variables naturelles contemporaines  $\hat{Y}_t^n$  et de  $\hat{r}_t^n$ , et aux chocs futurs anticipés  $E_t[\tilde{\varrho}_{t+1}]$  par l'intermédiaire des variables naturelles anticipées  $E_t[\hat{Y}_{t+1}^n]$  et de  $E_t[\hat{r}_{t+1}^n]$ .

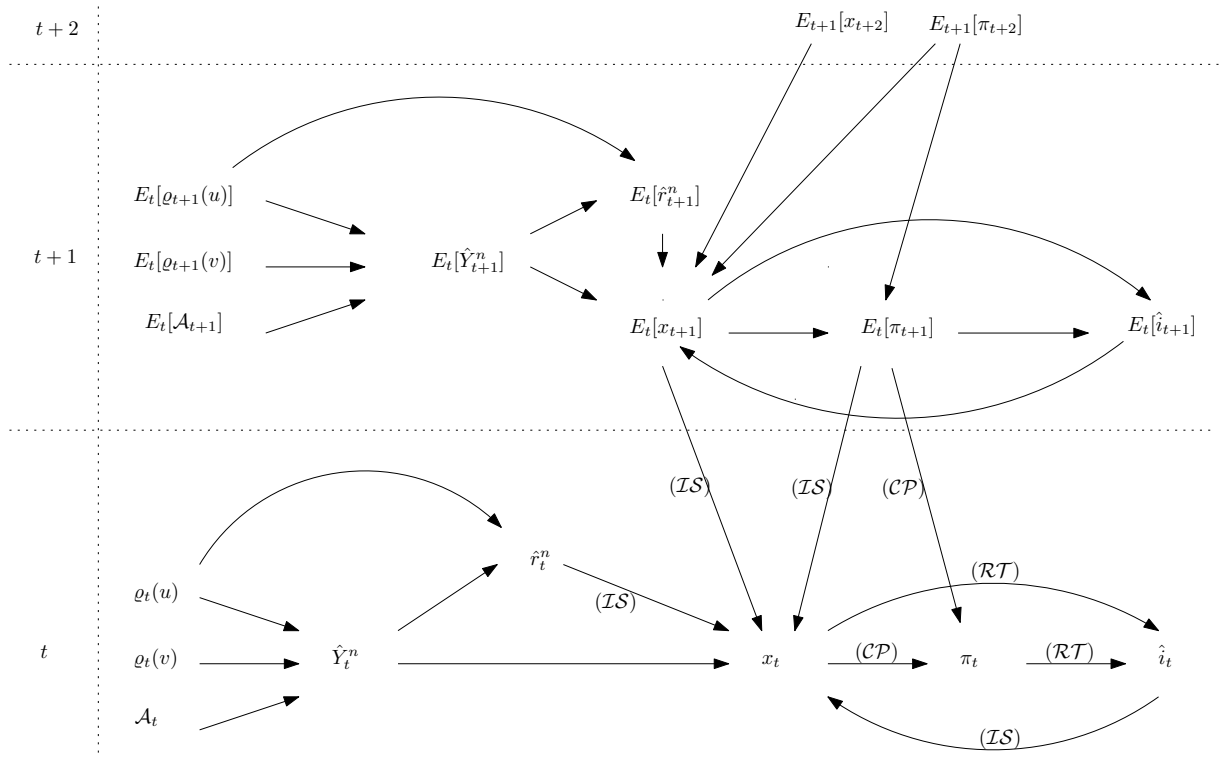


FIGURE 1 – La propagation des chocs  $\tilde{\varrho}_t$  et des chocs anticipés  $E_t[\tilde{\varrho}_{t+1}]$  aux variables endogènes principales  $x_t$ ,  $\pi_t$  et  $\hat{i}_t$ .

L'enchaînement des événements est le suivant : les chocs  $\tilde{\varrho}_t$  provoquent des déviations de  $\hat{Y}_t^n$

et de  $\hat{r}_t^n$ ; ces déviations provoquent à leur tour la modification de l'écart de production  $x_t$  à travers la relation (IS) et à travers la définition même de l'écart de production ( $x_t \equiv \hat{Y}_t - \hat{Y}_t^n$ ). La variation de  $x_t$  entraîne la modification de l'inflation  $\pi_t$  d'après la relation (CP). Les variations de  $x_t$  et de  $\pi_t$  sont à l'origine de la déviation de  $\hat{i}_t$  selon la règle de politique monétaire (RT), qui exerce un effet de retour sur  $x_t$  (cf. (IS)).

Les chocs futurs  $\tilde{\varrho}_{t+1}$  ont un impact sur  $x_t, \pi_t$  et  $\hat{i}_t$  dans la mesure où ils sont anticipés. En effet, l'anticipation des chocs futurs  $E_t[\tilde{\varrho}_{t+1}]$  est à l'origine des variations de  $E_t[\hat{Y}_{t+1}^n]$  et de  $E_t[\hat{r}_{t+1}^n]$  qui se répercutent sur  $E_t[x_{t+1}]$  et  $E_t[\pi_{t+1}]$ . Les modifications de  $E_t[x_{t+1}]$  et  $E_t[\pi_{t+1}]$  se transmettent à leur tour sur  $x_t$  et  $\pi_t$  selon les relations (IS) et (CP).

Lorsqu'il est nécessaire de donner des expressions concrètes aux différentes anticipations mobilisées dans la figure 1, il est toujours possible d'ajouter des hypothèses concernant les processus décrivant les perturbations réelles. Ainsi, Bullard & Mitra (2002) supposent que  $\{\hat{r}_t^n\}$  suit un processus autorégressif d'ordre 1.

La figure 1 illustre bien la place centrale des variables naturelles dans la propagation des chocs  $\tilde{\varrho}$ , mais elle ne permet pas de comprendre pourquoi elles varient sous l'impact de ces chocs. Pour saisir cela, on commence par un rappel de la définition implicite de la production naturelle  $Y_t^n$  :

$$\mathcal{M}^{-1} = s(Y_t^n, Y_t^n, Y_t^n; \varrho_t, \mathcal{A}_t), \quad (147)$$

(cf. équation (59)). Comme on s'intéresse ici aux déviations de  $Y_t^n$  par rapport à sa valeur à l'état stationnaire  $\bar{Y}$ , on remplace maintenant  $\mathcal{M}^{-1}$  dans (147) par le membre de droite de l'équation  $\mathcal{M}^{-1} = s(\bar{Y}, \bar{Y}, \bar{Y}; \bar{0}; \bar{\mathcal{A}})$  qui définit implicitement  $\bar{Y}$  (Preston 2005). On obtient ainsi l'égalité :

$$s(\bar{Y}, \bar{Y}, \bar{Y}; \bar{0}; \bar{\mathcal{A}}) = s(Y_t^n, Y_t^n, Y_t^n; \varrho_t; \mathcal{A}_t), \quad (148)$$

ou encore

$$\frac{v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{\mathcal{A}}); 0)}{u_C(\bar{Y}; 0) \bar{\mathcal{A}}} \times \frac{d(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{\mathcal{A}}))}{d(\bar{Y}/\bar{\mathcal{A}})} = \frac{v_h(f^{-1}(Y_t^n/\mathcal{A}_t); \varrho_t)}{u_C(Y_t^n; \varrho_t) \mathcal{A}_t} \times \frac{d(f^{-1}(Y_t^n/\mathcal{A}_t))}{d(Y_t^n/\mathcal{A}_t)} \quad (149)$$

L'expression (149) traduit une relation entre  $Y_t^n$  et  $\tilde{\varrho}_t \equiv [\varrho_t \ \mathcal{A}_t]$ , car  $Y_t^n, \varrho_t$  et  $\mathcal{A}_t$  sont les seules variables dans (149). Étant donné que  $Y_t^n$  est une variable endogène du modèle et que  $\tilde{\varrho}_t$  regroupe des variables exogènes, l'intuition économique de l'équation (149) est celle d'une production naturelle  $Y_t^n$  qui est fonction des perturbations réelles. L'équation (149) montre donc que ce sont bien les chocs  $\tilde{\varrho}_t$  qui sont à l'origine des modifications de  $Y_t^n$ . Toutefois, cette expression n'est pas très parlante lorsqu'il s'agit de comprendre *comment* les éléments de  $\tilde{\varrho}_t$  parviennent à provoquer des variations de  $Y_t^n$ . Pour illustrer cela, il convient de nouveau de faire appel aux techniques de linéarisation.

L'approximation log-linéaire de (149) autour de l'état stationnaire  $(1, \bar{Y}, 1, 0, 0)$  s'écrit :

$$\hat{Y}_t^n (\mathbf{e}_{uc} + \mathbf{e}_{vh} + \mathbf{e}_{\psi}) \simeq \frac{u_{c\varrho}}{u_c} \varrho_t(u) - \frac{v_{h\varrho}}{v_h} \varrho_t(v) + \left\{ 1 - \frac{\partial v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{\mathcal{A}}))}{\partial \bar{\mathcal{A}}} \times \frac{\bar{\mathcal{A}}}{v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{\mathcal{A}}))} - \frac{d\Psi(\bar{Y}/\bar{\mathcal{A}})}{d\bar{\mathcal{A}}} \times \frac{\bar{\mathcal{A}}}{\Psi(\bar{Y}/\bar{\mathcal{A}})} \right\} \mathbf{a}_t, \quad (150)$$

avec  $v_{h\varrho} \equiv \frac{\partial v_h(\bar{Y}/\bar{\mathcal{A}}; \bar{\varrho})}{\partial \bar{\varrho}}$ ,  $v_h \equiv \frac{\partial v(\bar{h}; \bar{\varrho})}{\partial \bar{h}} = \frac{\partial v(\bar{Y}/\bar{\mathcal{A}}; \bar{\varrho})}{\partial (\bar{Y}/\bar{\mathcal{A}})}$  et  $\mathbf{a}_t \equiv \ln\left(\frac{\mathcal{A}_t}{\bar{\mathcal{A}}}\right) = \ln \mathcal{A}_t$ . L'équation (150) est équivalente à

$$\hat{Y}_t^n \simeq \frac{\frac{u_{c\varrho}}{u_c} \varrho_t(u) - \frac{v_{h\varrho}}{v_h} \varrho_t(v) + (1 + \mathbf{e}_{vh} + \mathbf{e}_{\psi}) \mathbf{a}_t}{\mathbf{e}_{uc} + \mathbf{e}_{vh} + \mathbf{e}_{\psi}}, \quad (151)$$

car on peut montrer que  $\epsilon_{vh} = -\frac{\partial v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{\mathcal{A}}))}{\partial \bar{\mathcal{A}}} \times \frac{\bar{\mathcal{A}}}{v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{\mathcal{A}}))}$  et  $\epsilon_\psi = -\frac{d\Psi(\bar{Y}/\bar{\mathcal{A}})}{d\bar{\mathcal{A}}} \times \frac{\bar{\mathcal{A}}}{\Psi(\bar{Y}/\bar{\mathcal{A}})}$  (cf. annexe A.9).

Finalement, on peut remplacer dans (151) le terme  $\frac{u_{c\varrho}}{u_c} \varrho_t(u)$  par  $\phi^{-1} \mathbf{g}_t$  et  $-\frac{v_{h\varrho}}{v_h} \varrho_t(v)$  par  $\nu \mathbf{h}_t$ , avec  $\nu \equiv -\frac{v_{hh}\bar{h}}{v_h}$  et  $\mathbf{h}_t \equiv \frac{v_{h\varrho}}{hv_{hh}} \varrho_t$  :

$$\hat{Y}_t^n \simeq \frac{\phi^{-1} \mathbf{g}_t + \nu \mathbf{h}_t + (1 + \epsilon_{vh} + \epsilon_\psi) \mathbf{a}_t}{\epsilon_{uc} + \epsilon_{vh} + \epsilon_\psi}. \quad (152)$$

$\hat{Y}_t^n$  est donc une combinaison linéaire de  $\mathbf{g}_t$ ,  $\mathbf{h}_t$  et de  $\mathbf{a}_t$ .

L'intuition de  $\mathbf{g}_t \equiv -\frac{u_{c\varrho}}{u_{cc}\bar{Y}} \varrho_t(u)$  est dans ce contexte la suivante : la variable de perturbation  $\varrho_t(u)$  modifie l'utilité marginale de la consommation  $u_c$ . On peut mesurer l'ampleur de cette modification par la variation de la consommation qui serait nécessaire pour maintenir constante l'utilité marginale du revenu du ménage malgré la survenance de ce choc. Le changement de l'utilité marginale est donné par le terme  $u_{c\varrho} \varrho_t(u)$ , la compensation nécessaire par  $-u_{cc}\bar{Y}$ . Le signe négatif devant le terme de la compensation s'explique par le fait que  $\varrho_t(u) > 0$  *augmente* l'utilité marginale de la consommation. Pour compenser cela, il est nécessaire de diminuer la consommation. L'impact de  $\mathbf{g}_t$  sur  $Y_t^n$  est donné par  $\frac{\phi^{-1}}{\epsilon_{uc} + \epsilon_{vh} + \epsilon_\psi}$ . Un choc positif sur l'utilité  $\varrho_t(u) > 0$  augmente le niveau naturel de la production dans la mesure où  $-\frac{u_{c\varrho}}{u_{cc}\bar{Y}} > 0$  et  $\frac{\phi^{-1}}{\epsilon_{uc} + \epsilon_{vh} + \epsilon_\psi} > 0$ . En effet, le ménage représentatif augmente dans ces conditions son offre de travail, car il tire maintenant plus d'utilité des biens qu'il consomme. On voit ici la difficulté de distinguer entre chocs d'offre et choc de demande. A priori,  $\mathbf{g}_t$  s'interprète plutôt comme un choc de demande. Ce choc de demande modifie toutefois les conditions de l'offre, car toute variation de la quantité de biens que le ménage souhaite consommer a des répercussions sur son offre de travail et donc sur le niveau naturel de la production.

La variable de perturbation  $\varrho_t(v)$  modifie la désutilité marginale du travail  $v_h$ . L'ampleur de cette modification est mesurée par  $\mathbf{h}_t$  qui décrit la variation du travail nécessaire pour maintenir constant la désutilité marginale du travail malgré ce choc. Le terme  $-v_{h\varrho} \varrho_t(v)$  donne le changement dans la désutilité du travail,  $-v_{hh}\bar{Y}$  la compensation nécessaire. L'apparition d'un signe négatif dans les deux termes s'explique par le fait que la désutilité du travail du ménage n'est pas modélisée par la fonction  $v(\cdot)$ , mais par  $-v(\cdot)$  (cf. (1)). L'impact de  $\mathbf{h}_t$  sur la production naturelle est donnée par  $\frac{\nu}{\epsilon_{uc} + \epsilon_{vh} + \epsilon_\psi} < 0$ . Un choc  $\varrho_t(v) > 0$ , i.e. un choc qui augmente la désutilité du travail, diminue le niveau naturel de la production  $Y_t^n$ , car il fait baisser l'offre de travail du ménage représentatif.

Un choc positif sur le niveau technique, i.e.  $\mathcal{A}_t > 0$ , induit une augmentation de la production naturelle  $Y_t^n$ , car  $\frac{1 + \epsilon_{vh} + \epsilon_\psi}{\epsilon_{uc} + \epsilon_{vh} + \epsilon_\psi} > 0$ . Le mécanisme est simple : grâce à l'augmentation de  $\mathcal{A}_t$ , les entreprises produisent une plus grande quantité de biens à partir d'une quantité de travail inchangée.

En substituant dans (106)  $\mathbf{g}_t$  par  $-\frac{u_{c\varrho}}{u_{cc}\bar{Y}} \varrho_t(u)$  et  $\mathbf{g}_{t+1}$  par  $-\frac{u_{c\varrho}}{u_{cc}\bar{Y}} \varrho_{t+1}(u)$  on obtient l'expression

$$\hat{r}_t^n \simeq \phi^{-1} \left\{ E_t[\hat{Y}_{t+1}^n] - \hat{Y}_t^n - \frac{u_{c\varrho}}{u_{cc}\bar{Y}} \varrho_t(u) + E_t \left[ \frac{u_{c\varrho}}{u_{cc}\bar{Y}} \varrho_{t+1}(u) \right] \right\}, \quad (153)$$

qui met en évidence les mécanismes qui font en sorte que  $\hat{r}_t^n$  varie sous l'impact des chocs courants  $\varrho_t$  et des chocs anticipés  $E_t[\tilde{\varrho}_{t+1}]$ . En effet, (153) montre que des déviations de  $\hat{Y}_t^n$  et de  $E_t[\hat{Y}_{t+1}^n]$ , entraînées par  $\tilde{\varrho}_t$  et par  $E_t[\tilde{\varrho}_{t+1}]$ , se répercutent sur  $\hat{r}_t^n$ . A cet effet indirect, qui passe par l'intermédiaire du niveau naturel de la production, s'ajoute l'impact direct de  $\varrho_t(u)$  et de  $E_t[\varrho_{t+1}(u)]$  sur  $\hat{r}_t^n$ .

La propagation des chocs aux variables endogènes principales est essentiellement localisée dans la relation (IS). Pour souligner le caractère indirect de la propagation, il convient de

développer les termes  $x_t$  et  $E_t[x_{t+1}]$  dans (IS). On obtient ainsi :

$$\hat{Y}_t \simeq \hat{Y}_t^n + E_t[\hat{Y}_{t+1}] - E_t[\hat{Y}_{t+1}^n] - \phi(\hat{i}_t - E_t[\pi_{t+1}] - \hat{r}_t^n) \quad (154)$$

L'équation (154) met en évidence le rôle des variables de relais  $\hat{Y}_t^n$ ,  $\hat{r}_t^n$  et  $E_t[\hat{Y}_{t+1}^n]$  qui assurent la connexion entre les perturbations réelles courantes et anticipées ( $\tilde{\varrho}_t$  et  $E_t[\tilde{\varrho}_{t+1}]$ ) et les variables endogènes principales.

**Le propagation des chocs  $u_t$  et  $v_t$**  Le terme de perturbation de la courbe de Phillips  $u_t$  et le choc de politique monétaire  $v_t$  exercent un impact sur les variables endogènes principales d'une manière très différente des perturbations réelles : la propagation de  $u_t$  et  $v_t$  aux variables endogènes principales se fait *sans le concours intermédiaire des variables naturelles* ; celles-ci restent d'ailleurs figées aux valeurs prises avant la survenance de ces chocs.

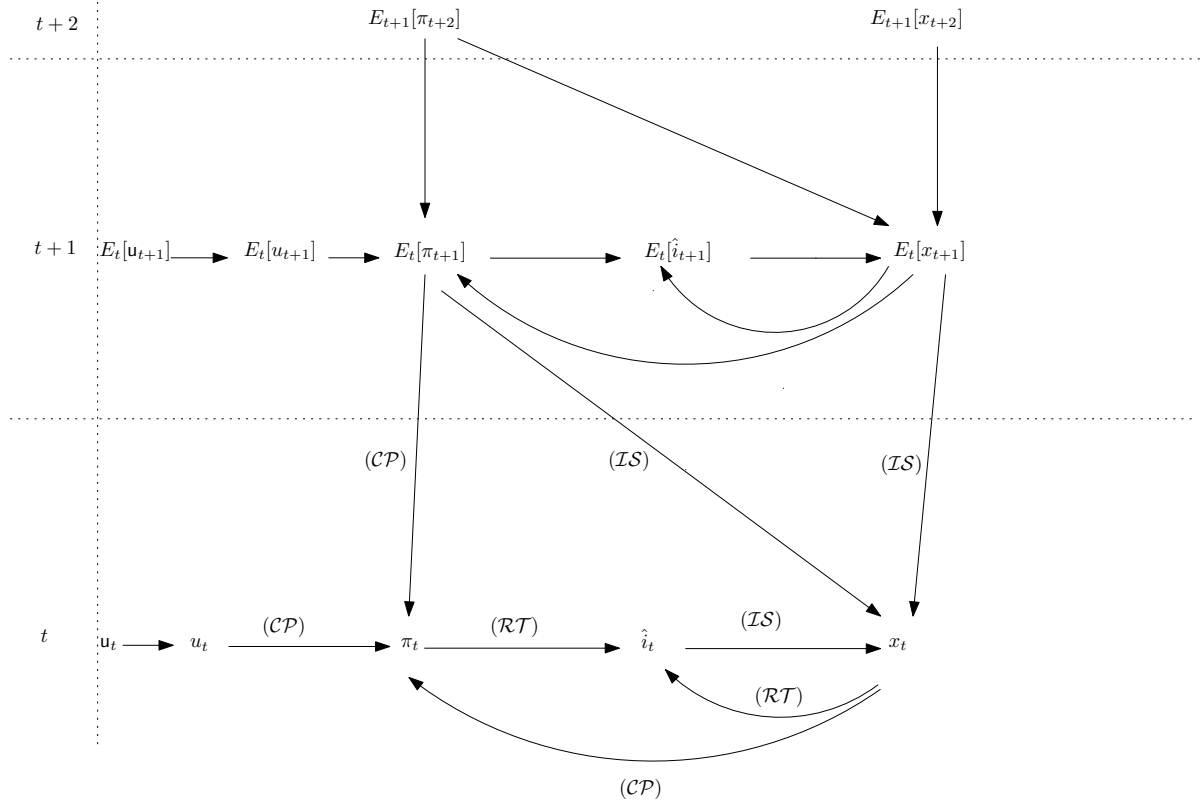


FIGURE 2 – La propagation du choc  $u_t$  et du choc anticipé  $E_t[u_{t+1}]$  aux variables endogènes principales  $x_t$ ,  $\pi_t$  et  $\hat{i}_t$ .

On voit sur la figure 2 que le choc  $u_t$  affecte une des variables endogènes principales du modèle linéaire, en l'occurrence  $\pi_t$ , et cela *sans modification* d'une des variables naturelles du modèle. La variation de  $\pi_t$  générée de cette manière se propage sur  $\hat{i}_t$  et sur  $x_t$  ; cette dernière variable exerce alors un effet de retour sur  $\pi_t$  et  $\hat{i}_t$ . Le choc anticipé  $E_t[u_{t+1}]$  fait varier l'inflation anticipée  $E_t[\pi_{t+1}]$ , ce qui entraîne des déviations de  $E_t[\hat{i}_{t+1}]$  et de  $E_t[x_{t+1}]$ . La variation de  $E_t[x_{t+1}]$  provoque des effets de retour sur  $E_t[\pi_{t+1}]$  et sur  $E_t[\hat{i}_{t+1}]$  qui se propagent à  $x_t$  et  $\pi_t$ .

La figure 3 montre que l'enchaînement des événements est similaire pour ce qui concerne le choc  $v_t$ . Ce choc se propage aux variables endogènes principales *sans modification des variables naturelles*. La déviation de  $\hat{i}_t$  générée par le choc de politique monétaire provoque à son tour des déviations de  $x_t$  et de  $\pi_t$  ainsi que des effets de retour sur  $\hat{i}_t$ . Le choc anticipé  $E_t[w_{t+1}]$  fait varier le taux d'intérêt anticipé  $E_t[\hat{i}_{t+1}]$ , ce qui entraîne des déviations de  $E_t[x_{t+1}]$  et de  $E_t[\pi_{t+1}]$ , qui affectent à travers les relations (IS) et (CP)  $x_t$  et de  $\pi_t$ .

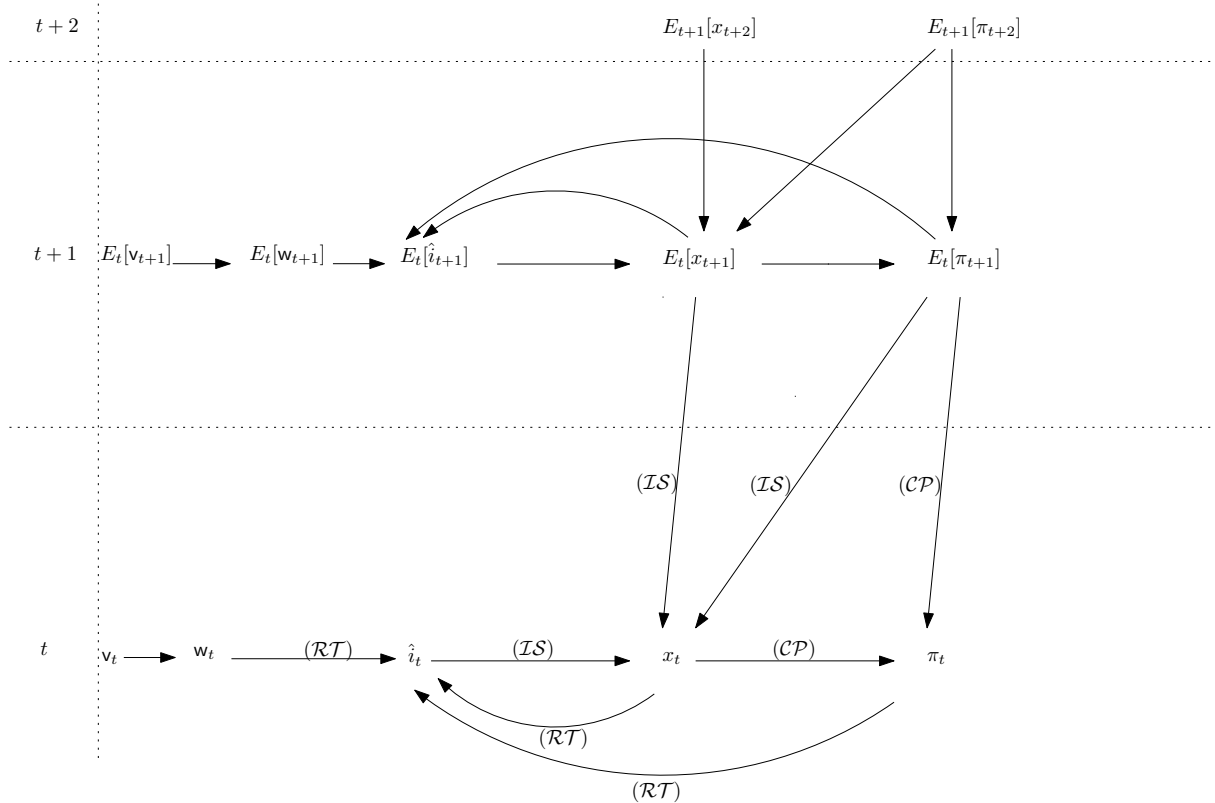


FIGURE 3 – La propagation du choc  $w_t$  et du choc anticipé  $E_t[w_{t+1}]$  aux variables endogènes principales  $x_t$ ,  $\pi_t$  et  $\hat{i}_t$ .

Malgré toutes les différences exposées dans cette section, les chocs  $q_t$  et  $v_t$  ont un point important en commun. Ils « activent » ce que l'on pourrait appeler le moteur du modèle : le terme  $(\hat{i}_t - E_t[\pi_{t+1}] - \hat{r}_t^n)$  dans l'équation  $(IS)$  qui correspond à l'écart entre le taux d'intérêt réel et le taux d'intérêt naturel :  $(\hat{r}_t - \hat{r}_t^n)$ . A l'état stationnaire  $(1, \bar{Y}, 1, 0, 0)$ , l'écart est égal à zéro, car les valeurs associées à l'état stationnaire de  $\hat{i}_t$ , de  $E_t[\pi_{t+1}]$  et de  $\hat{r}_t^n$  sont toutes égales à zéro. La survenance du choc  $v_t$  crée un écart positif (en termes absolus) en éloignant  $\hat{i}_t$  de zéro. Les chocs réels parviennent au même résultat (i.e. un écart non nul) en modifiant  $\hat{r}_t^n$ .

On remarque que le choc  $u_t$  n'affecte pas directement le terme  $(\hat{i}_t - E_t[\pi_{t+1}] - \hat{r}_t^n)$ . Dans la mesure où ce choc ne fait pas partie du modèle de base de Woodford, on comprend mieux pourquoi Woodford fait référence à la filiation Wicksellienne de son modèle : dans le modèle  $(IS)$  - (130) -  $(RT)$ , les déviations de l'économie par rapport à l'état stationnaire s'expliquent systématiquement par des modifications de l'écart  $(\hat{r}_t - \hat{r}_t^n)$ , qui se trouve justement au cœur de l'analyse de Wicksell (1898).

L'écart entre le taux d'intérêt réel et le taux d'intérêt naturel joue également un rôle important dans le canal de transmission de la politique monétaire que présente la sous-section suivante.

## 4.2 Le canal de transmission de la politique monétaire

La sous-section 4.1 a mis en évidence la capacité des chocs d'engendrer des écarts entre les réalisations courantes des variables endogènes et leurs valeurs de long terme. En particulier, les chocs sont susceptibles d'éloigner le facteur d'inflation  $\Pi_t$  et le niveau courant de la production  $Y_t$  des cibles  $\Pi_t^*$  et  $Y_t^*$  retenues par les autorités monétaires (cf. équation (73)). Une telle configuration devrait inciter les autorités monétaires à utiliser des instruments de la politique

monétaire pour tenter de réduire l'écart entre les variables courantes et leurs cibles.

Dans le cadre des politiques retenues dans la sous-section 2.3.1, l'instrument de la politique monétaire est le taux d'intérêt nominal. Ce choix de l'instrument est cohérent dans la mesure où la manipulation du taux d'intérêt nominal permet d'influencer les deux autres variables endogènes principales du modèle linéarisé : l'écart de production et l'inflation. On trouve à partir des équations (*IS*) et (*CP*) les dérivées partielles :

$$\frac{\partial x_t}{\partial \hat{i}_t} \simeq -\phi < 0 \quad (155)$$

et

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial \hat{i}_t} \simeq -\lambda\phi < 0. \quad (156)$$

Les équations (155) et (156) montrent que - toutes choses égales par ailleurs - une hausse du taux d'intérêt nominal a pour conséquence une baisse de l'écart de production et de l'inflation. Compte tenu des définitions de  $\pi_t$  et de  $x_t$ , ces baisses correspondent à des diminutions du facteur d'inflation  $\Pi_t$  et de la production courante  $Y_t$  (cf. annexe A.10). Les autorités monétaires peuvent par conséquent exploiter les relations inverses entre  $\hat{i}_t$  et les variables ciblées  $\Pi_t$  et  $Y_t$  pour réduire l'écart entre les cibles et les réalisations des variables ciblées : il suffit de augmenter  $\hat{i}_t$  lorsque  $\Pi_t > \Pi_t^*$  (ou  $Y_t > Y_t^*$ ) et de diminuer  $\hat{i}_t$  lorsque  $\Pi_t < \Pi_t^*$  (ou  $Y_t < Y_t^*$ ). C'est d'ailleurs exactement ce type de comportement que décrit la fonction de réaction (73).

On connaît maintenant le sens et l'ampleur de la réaction des variables endogènes du modèle linéarisé par rapport à une variation de  $\hat{i}_t$ . A ce stade du raisonnement se pose la question du mécanisme qui induit la relation inverse entre le taux d'intérêt nominal et les variables ciblées  $\Pi_t$  et  $Y_t$ .<sup>15</sup> La sous-section suivante répondra à cette question.

#### 4.2.1 Le canal de la consommation

Le canal de transmission n'est pas étudié d'une manière très détaillée et explicite dans la littérature consacrée au nouveau modèle keynésien : dans l'ouvrage de Woodford (2003), il n'existe ni de référence d'index, ni de titre de chapitre, de section ou de sous-section consacré au canal de transmission de la politique monétaire. Le manuel de Galí (2008) contient deux références d'index consacrées au canal de transmission, qui renvoient malheureusement soit à l'exposition générale des questions traitées dans l'ouvrage (Galí 2008, p. 1 - 2), soit à un contexte qui est bien différent de celui de la version de base du nouveau modèle keynésien (Galí 2008, p. 32). Chez Walsh (2003), l'analyse du canal de transmission se limite à la description littéraire suivante :

*"As long as the central bank is able to affect the real interest rate through its control of the nominal interest rate, monetary policy can affect real output. Changes in the real interest rate alter the optimal time path of consumption. An increase in the real rate of interest, for instance, leads households to attempt to postpone consumption. Current consumption falls relative to future consumption."* (Walsh 2003, p. 248)

Cette sous-section a l'ambition de donner une présentation formalisée des intuitions proposées par Walsh.

On a vu dans la sous-section 3.1.2 que le taux d'intérêt nominal  $i_t$  intervient seulement dans deux des six équations qui définissent l'équilibre en anticipations rationnelles : l'équation (83), qui exprime notamment les conditions de la demande, et l'équation (92) qui décrit comment les

15. La présente section n'a pas l'ambition d'étudier les performances de la règle de politique monétaire (73) en termes de stabilisation de l'économie et de la comparer aux performances associées à d'autres règles de politique monétaire. Cf. sur ce point Evans & Honkapohja (2003).

autorités monétaires fixent  $i_t$  en appliquant la règle de politique monétaire. Cette section fera abstraction de cette dernière équation, car pour les besoins de l'étude du canal de transmission de la politique monétaire, elle attribuera à  $i_t$  le statut d'une variable exogène. En effet, l'intérêt de cette étude est de mettre en évidence le mécanisme déclenché par une variation de  $i_t$ , et non les raisons qui sont à l'origine de cette variation.

Par conséquent, on peut se concentrer sur l'analyse de l'impact du taux d'intérêt nominal sur la demande, et plus précisément sur la seule composante de la demande représentée dans le nouveau modèle keynésien de base : la demande de biens de consommation. Le canal de transmission de la politique monétaire correspond dans ces conditions effectivement au *canal de la consommation* décrit par Walsh (2003)

Pour comprendre *comment* s'exerce l'influence du taux d'intérêt nominal sur la demande, il convient de reconstituer le cadre de la version non-linéaire du modèle et notamment la contrainte budgétaire du ménage représentatif.

**Modification de la contrainte budgétaire** Toute variation du taux d'intérêt nominal modifie la contrainte budgétaire intertemporelle du ménage représentatif ; elle affecte par conséquent les conditions de l'arbitrage entre consommation courante et consommation future.

Pour montrer cela, on revient à la contrainte budgétaire intertemporelle (29). Lorsqu'on se place à la période  $t+1$ , et en tenant compte de tous les états du monde susceptibles de se réaliser en  $t+1$ , étant donné l'état du monde qui s'est réalisé en  $t$ , (29) devient

$$Q_{t,t+1}(P_{t+1}C_{t+1} - \mathfrak{Y}_{t+1}) = -P_t C_t - \sum_{s=t+2}^{\infty} E_{t+1}[Q_{t,s} P_s C_s] + W_t + \mathfrak{Y}_t + \sum_{s=t+2}^{\infty} E_{t+1}[Q_{t,s} \mathfrak{Y}_s] \quad (157)$$

avec  $\mathfrak{Y}_s = \int_0^1 w_s(I) h_s(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_s(i) di - T_s$ , ou encore

$$C_{t+1} = \frac{\mathfrak{Y}_{t+1}}{P_{t+1}} + \frac{-P_t C_t - \sum_{s=t+2}^{\infty} E_{t+1}[Q_{t,s} P_s C_s] + W_t + \mathfrak{Y}_t + \sum_{s=t+2}^{\infty} E_{t+1}[Q_{t,s} \mathfrak{Y}_s]}{P_{t+1} Q_{t,t+1}} \quad (158)$$

En prenant les anticipations en  $t$  des membres de droite et de gauche de (158), on trouve

$$E_t[C_{t+1}] = E_t \left[ \frac{\mathfrak{Y}_{t+1}}{P_{t+1}} \right] + E_t \left[ \frac{-P_t C_t - \sum_{s=t+2}^{\infty} E_{t+1}[Q_{t,s} P_s C_s] + W_t + \mathfrak{Y}_t + \sum_{s=t+2}^{\infty} E_{t+1}[Q_{t,s} \mathfrak{Y}_s]}{P_{t+1} Q_{t,t+1}} \right] \quad (159)$$

ainsi que la dérivée partielle

$$\frac{\partial E_t[C_{t+1}]}{\partial C_t} = \frac{-P_t}{E_t[P_{t+1} Q_{t,t+1}]} \quad (160)$$

Dans la mesure où la dérivée partielle (160) maintient constantes les variables  $P_{t+1}$  et  $Q_{t,t+1}$ , on y a  $E_t[P_{t+1} Q_{t,t+1}] = E_t[P_{t+1}] \times E_t[Q_{t,t+1}]$ , ce qui permet d'écrire

$$\frac{\partial E_t[C_{t+1}]}{\partial C_t} = -(1 + i_t) \times \frac{P_t}{E_t[P_{t+1}]} \quad (161)$$

L'interprétation de (161) est la suivante : pour  $P_t$  et  $E_t[P_{t+1}]$  donné, toute hausse de la consommation courante  $C_t$  implique une baisse de la consommation future anticipée  $E_t[C_{t+1}]$ . L'ampleur de cette baisse est proportionnelle au niveau du taux d'intérêt nominal  $i_t$ . En effet, lorsque le

ménage augmente sa consommation courante d'une unité du bien, il se prive de  $(1 + i_t)$  unités de biens de consommation future. Ces  $(1 + i_t)$  unités correspondent à la diminution du principal de son épargne réelle (égale à une unité du bien) à laquelle s'ajoute la perte de la rémunération associée à cette épargne réelle (égale à  $i_t$  unités de biens).

**Effets sur la consommation** Dans ces conditions, la hausse de  $i_t$  incite le ménage représentatif à réduire sa consommation courante  $C_t$  pour pouvoir profiter de l'amélioration de la rémunération de l'épargne. Pour voir cela, on isole  $C_t$  dans l'équation (38) à l'aide de la fonction réciproque de  $u_c(C_t; \varrho_t)$  :

$$C_t = u_c^{-1}(u_c(C_t; \varrho_t); \varrho_t) = u_c^{-1}\left(\frac{(1 + i_t)\beta P_t}{E_t \left[\frac{P_{t+1}}{u_c(C_{t+1}; \varrho_{t+1})}\right]}; \varrho_t\right). \quad (162)$$

On obtient la dérivée partielle :

$$\frac{\partial C_t}{\partial i_t} = \frac{\partial u_c^{-1}(u_c(C_t; \varrho_t); \varrho_t)}{\partial u_c(C_t; \varrho_t)} \times \frac{\partial u_c(C_t; \varrho_t)}{\partial i_t}. \quad (163)$$

En exprimant (163) sous la forme

$$\frac{\partial C_t}{\partial i_t} = \frac{1}{u_{cc}(C_t; \varrho_t)} \times \frac{\beta P_t}{E_t \left[\frac{P_{t+1}}{u_c(C_{t+1}; \varrho_{t+1})}\right]} \quad (164)$$

(cf. annexe A.11), on constate que  $\frac{\partial C_t}{\partial i_t} < 0$ , car  $u_{cc}(C_t; \varrho_t) < 0$  et  $\frac{\beta P_t}{E_t \left[\frac{P_{t+1}}{u_c(C_{t+1}; \varrho_{t+1})}\right]} > 0$  pour  $P_t > 0$  et  $P_{t+1} > 0$ . L'équation (164) montre donc que la hausse du taux d'intérêt nominal induit une baisse de la consommation courante. Cette contraction de la consommation exerce un effet récessif sur l'économie.

#### 4.2.2 Le « paradoxe de l'épargne »

La réduction de la consommation courante  $C_t$  se répercute sur le niveau de la production, car les firmes ajustent leur niveau de production instantanément au nouveau niveau de la demande de biens de consommation. D'après la condition d'apurement  $C_t = Y_t$  (équation (81)), on peut remplacer  $C_t$  dans (164) par  $Y_t$  :

$$\frac{\partial Y_t}{\partial i_t} = \frac{\partial C_t}{\partial i_t} = \frac{1}{u_{cc}(C_t; \varrho_t)} \times \frac{\beta P_t}{E_t \left[\frac{P_{t+1}}{u_c(C_{t+1}; \varrho_{t+1})}\right]} < 0, \quad (165)$$

i.e. la baisse de la production est *exactement* égale à la baisse de la consommation courante.

La réduction de  $Y_t$ , déclenchée par celle de  $C_t$ , exerce un effet de retour sur les revenus du ménage représentatif. Les firmes versent effectivement au ménage représentatif des salaires  $\int_0^1 w_t(I)h_t(I) dI$  et des profits  $\int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di$ . Ces deux types de revenus diminuent sous l'impact de la baisse de la production. L'effet de retour sur les revenus est tel qu'il compense parfaitement la réduction de consommation courante. Autrement dit, *la baisse de la consommation courante du ménage n'a aucun impact sur son épargne*. En effet, le flux de l'épargne privée  $\mathcal{S}_t^m$ , i.e. la somme d'argent que le ménage ajoute en  $t$  à sa richesse  $W_t$ , est la différence entre ses revenus et ses dépenses de consommation :

$$\mathcal{S}_t^m = W_t - B_{t-1} - M_{t-1} + \int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di + \int_0^1 w_t(I)h_t(I) dI - T_t - C_t P_t. \quad (166)$$

avec  $W_t - B_{t-1} - M_{t-1} + \int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di$  les revenus financiers (rémunération des titres et profits perçus),  $\int_0^1 w_t(I)h_t(I) dI$  les revenus du travail,  $T_t$  les dépenses d'impôt et  $C_t P_t$  les dépenses de consommation.

Le profit agrégé des firmes est la différence entre leur chiffre d'affaires agrégé et la masse salariale versée au ménage :

$$\int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di = Y_t P_t - \int_0^1 w_t(I)h_t(I) dI \quad \forall t \quad (167)$$

Sachant qu'on a à l'équilibre  $Y_t = C_t$ , on trouve donc pour l'épargne :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_t^m &= W_t - B_{t-1} - M_{t-1} + \left( Y_t P_t - \int_0^1 w_t(I)h_t(I) dI \right) + \int_0^1 w_t(I)h_t(I) dI - C_t P_t - T_t \\ &= W_t - T_t - B_{t-1} - M_{t-1} \\ &= B_t + M_t - B_{t-1} - M_{t-1} \end{aligned} \quad (168)$$

car on peut montrer que  $W_t - T_t = B_t + M_t$  à l'équilibre (cf. annexe A.12). Dans la mesure où les marchés des titres et de la monnaie sont à l'équilibre ( $B_t = B_t^s \forall t$  et  $M_t = M_t^s \forall t$ ), l'épargne privée  $\mathcal{S}_t^m$  est parfaitement déterminée par l'offre de monnaie et d'obligations publiques, et donc indépendante du taux d'intérêt nominal. L'impact d'une petite variation du taux d'intérêt nominal sur le flux d'épargne privée est effectivement donné par

$$\frac{\partial \mathcal{S}_t^m}{\partial i_t} = \frac{\partial (B_t^s + M_t^s - B_{t-1}^s - M_{t-1}^s)}{\partial i_t} = \frac{\partial (D_t - D_{t-1})}{\partial i_t} = 0 \quad (169)$$

(on rappelle que  $\{D_t\}$  est un processus exogène). *Le flux d'épargne privée n'est donc pas affecté par les variations du taux d'intérêt nominal.*

Le comportement du ménage représentatif en termes d'épargne paraît assez paradoxal : le ménage diminue sa consommation pour augmenter son épargne, mais en faisant cela, il provoque des effets de retour sur ses revenus qui font en sorte que son épargne reste inchangée !

On peut également montrer que l'épargne nationale, c'est-à-dire la somme de l'épargne privée et de l'épargne publique, est à l'équilibre nécessairement égale à zéro (cf. annexe A.12). L'égalité comptable standard entre investissement et épargne nationale est donc vérifiée dans la version de base du nouveau modèle keynésien, car compte tenu de l'absence de capital dans la fonction de production, l'investissement est également toujours égal à zéro. L'indépendance de l'épargne privée du taux d'intérêt et l'absence structurelle d'épargne nationale sont des propriétés fondamentales du nouveau modèle keynésien qui n'ont pas été évoquées par la littérature.

## 5 Conclusion

Depuis longtemps, les macroéconomistes utilisent des versions « ad hoc » de la courbe de Phillips et de la relation *IS*. Ce papier a mis en évidence la faculté de la littérature consacrée au nouveau modèle keynésien de donner des justifications microéconomiques à ces relations agrégées.

Dans cette perspective, le nouveau modèle keynésien peut être considéré comme un corpus théorique permettant de générer des versions particulières de la relation *IS* et de la courbe de Phillips qui sont compatibles avec l'hypothèse de la rationalité intrinsèque des agents. En effet les ménages du modèle maximisent leur utilité et les firmes sont à la recherche du profit maximal ; les deux types d'agents privés sont capables d'établir des anticipations rationnelles.

Un premier apport du présent document réside dans l'explicitation des équations décrivant les fondements microéconomiques de la version de base du nouveau modèle keynésien (celui du

chapitre 4 de Woodford (2003)). Par recouplement des éléments des chapitres 2 et 3 de Woodford (2003), il est possible de reconstituer la fonction d'utilité (1). La mise en évidence d'hypothèses implicites du modèle constitue un deuxième apport de cette étude. Il s'agit notamment des propriétés des fonctions  $u(\cdot)$ ,  $v(\cdot)$  et  $f(\cdot)$ , de la signification précise de l'hypothèse de l'agent représentatif, du fait que l'épargne de ce ménage est indépendante du taux d'intérêt et de l'absence structurelle de l'épargne nationale à l'équilibre.

Le nouveau modèle keynésien analyse les processus qui sont à l'origine des fluctuations dans cette économie : ce sont essentiellement des *perturbations réelles*, i.e. des changements des préférences et du niveau technique. A ces chocs réels s'ajoutent des perturbations qui affectent la politique monétaire ; pour approcher le modèle de Woodford de celui de Clarida et al. (1999), on peut également introduire un processus de perturbation affectant la courbe de Phillips. La présente étude montre toutefois que les deux propositions pour l'introduction d'un tel processus ne sont pas entièrement satisfaisantes du point de vue théorique : elles ne permettent effectivement pas de lever les problèmes d'articulation entre le modèle de Woodford (2003) et le modèle de Clarida et al. (1999).

Les différents types de chocs sont responsables des fluctuations des variables endogènes du nouveau modèle keynésien. L'étude fournit une analyse détaillée du processus de propagation de chaque type de choc, i.e. elle montre les étapes intermédiaires qui se situent entre le choc initial et la modification résultante des variables endogènes.

Pour faire face à ces fluctuations, les autorités monétaires peuvent utiliser le taux d'intérêt nominal comme instrument de la politique monétaire. La question du canal de transmission n'occupe pas une place centrale dans la littérature consacrée au nouveau modèle keynésien. La présente étude formalise l'intuition de Walsh (2003) selon laquelle la politique monétaire fonctionne grâce au canal de transmission de la consommation : dans le nouveau modèle keynésien, il existe effectivement une relation négative entre le taux d'intérêt nominal et la demande de biens de consommation. Les autorités monétaires peuvent se servir de cette relation pour stabiliser l'économie.

## A Annexes

### A.1 Hypothèses sous-jacentes de la modélisation à agent représentatif

Il s'agit d'abord de montrer que dans la présentation du nouveau modèle keynésien de Woodford (2003), l'économie est peuplée par un grand nombre de ménages qui se comportent tous exactement de la même manière que le ménage représentatif.

Selon Woodford (2003, p. 144 - 145), l'hypothèse selon laquelle le ménage représentatif, qui fournit simultanément tous les types de travail  $I$ , cherche à maximiser

$$E_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left( u(C_t; \varrho_t) - \int_0^1 v(h_t(I); \varrho_t) dI \right) \right] \quad (1)$$

est équivalent à l'hypothèse que chaque ménage est spécialisé dans un seul type de travail et cherche à maximiser

$$E_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (u(C_t; \varrho_t) - v(h_t(I); \varrho_t)) \right] \quad (170)$$

(les expressions (1) et (170) sont adaptées à la présente étude, ce qui explique notamment l'absence des encaisses réelles qui sont systématiquement retenues dans les fonctions d'utilité du troisième chapitre de Woodford (2003).)

Supposons que l'économie soit peuplée de  $n$  ménages. Selon le modèle basé sur l'expression (170), on est en présence de  $n$  ménages qui maximisent (170). Ce modèle ne peut pas être équivalent à un modèle où *un seul ménage* - le ménage représentatif - maximise (1). Pour garantir l'équivalence entre les deux versions du modèle, il faut que  $n$  ménages maximisent la fonction d'utilité (1).

On est donc en présence de  $n$  ménages qui se comportent tous exactement comme le ménage représentatif.

On remarque toutefois que l'équivalence évoquée par Woodford pose un problème mathématique. D'une part, il suppose l'existence d'un continuum de types de travail, i.e. une infinité de types de travail. D'autre part, il imagine qu'il existe pour chaque type de travail un ménage qui y est spécialisé. On en déduit que  $n = \infty$ . Cette déduction est toutefois en contradiction avec l'affirmation

*"Consider an economy made up of a large number of identical households." (Woodford 2003, p. 64),*

car un « grand nombre » ne peut pas être infini. Cette incohérence a été corrigée de manière astucieuse par Preston, qui suppose - comme c'est le cas des firmes dans le modèle de Woodford - l'existence d'un continuum de ménages Preston (2005).

Dans une deuxième étape, il s'agit de montrer que les variables qui se réfèrent à l'agent représentatif sont implicitement définies comme variables *per capita*. Pour prouver cela, on montre d'abord qu'une définition standard de ces variables induit des incohérences.

L'équation (1.4) du troisième chapitre du traité de Woodford précise que le ménage représentatif perçoit de la part des firmes un flux de profits distribués égal  $\int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di$ . Concernant la distribution des profits des firmes, Woodford précise :

*"I assume that each household owns an equal share of all of the firms ..."* (Woodford 2003, p. 146)

Dans une telle situation, chaque ménage devrait percevoir un flux de dividendes égal au profit cumulé des firmes *divisé par le nombre de ménages*. Le profit cumulé des firmes est égal à  $\int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di$ , car chaque firme  $i$  appartient au continuum  $[0, 1]$ . Chaque ménage devrait par conséquent recevoir  $\frac{1}{n} \int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di$ .

Or, chacun des  $n$  ménages se trouve dans la même situation que le ménage représentatif, i.e. il reçoit  $\int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di$  d'après l'équation (1.4). On trouve par conséquent un profit cumulé distribué égal à  $n \int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di$ . D'autre part, on a vu que le profit cumulé réalisé par les firmes est égal à  $\int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di$ . On en déduit :

$$n \int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di = \int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di \Rightarrow n = 1 \quad (171)$$

Ce résultat est absurde, car on sait que  $n$  est grand (Woodford 2003, p. 64).

Ce problème disparaît dès que l'on définit les variables de l'agent représentatif comme variables *per capita*. Soit  $\int_0^1 \mathfrak{P}_t(i) di$  le profit cumulé de l'économie, i.e. le profit réalisé par toutes les firmes  $i \in [0, 1]$ . On définit maintenant le profit versé par les firmes au ménage représentatif comme variable *per capita* :  $\mathcal{P}_t = \frac{1}{n} \int_0^1 \mathfrak{P}_t(i) di$ . Comme chaque ménage reçoit une distribution de profit égale à  $\frac{1}{n} \int_0^1 \mathfrak{P}_t(i) di$ , on obtient

$$n \times \frac{1}{n} \int_0^1 \mathfrak{P}_t(i) di = \int_0^1 \mathfrak{P}_t(i) di, \quad (172)$$

i.e. le profit total distribué aux ménages est égal au profit réalisé dans l'économie.

## A.2 Répartition optimale de la consommation agrégée

On remarque d'abord que la fonction d'objectif du programme (5) est continue pour  $\sigma > 1$ , i.e. il existe une solution. D'autre part, l'ensemble de contrainte est borné et fermé pour  $p_t(i) > 0 \forall i$  et  $\mathfrak{Z}_t \geq 0$ .

La condition de premier ordre

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t(i)} = \left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right) c_t(i)^{-\frac{1}{\sigma}} \times \left(\int_0^1 c_t(i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} di\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \times \left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right) - \lambda_{\mathcal{L}} p_t(i) = 0, \quad (6)$$

donne

$$\begin{aligned} c_t(i)^{-\frac{1}{\sigma}} C_t^{\frac{1}{\sigma}} &= \lambda_{\mathcal{L}} p_t(i) \\ \Leftrightarrow c_t(i) &= \lambda_{\mathcal{L}}^{-\sigma} p_t(i)^{-\sigma} C_t. \end{aligned} \quad (173)$$

Par insertion de (173) dans l'index de consommation (2) et en utilisant la définition de l'indice des prix  $P_t$ , on obtient

$$\begin{aligned} C_t &= \left(\int_0^1 \left(\lambda_{\mathcal{L}}^{-\sigma} p_t(i)^{-\sigma} C_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} di\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\ &= C_t \lambda_{\mathcal{L}}^{-\sigma} \left(\int_0^1 p_t(i)^{1-\sigma} di\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\ &= C_t \lambda_{\mathcal{L}}^{-\sigma} P_t^{-\sigma}, \end{aligned} \quad (174)$$

ce qui prouve que

$$\lambda_{\mathcal{L}} = \frac{1}{P_t}. \quad (175)$$

L'insertion de (175) dans (173) donne la part de  $c_t(i)$  dans la consommation agrégée  $C_t$  :

$$c_t(i) = \left(\frac{p_t(i)}{P_t}\right)^{-\sigma} C_t. \quad (7)$$

On obtient alors pour  $\mathfrak{Z}_t$  :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_t &\equiv \int_0^1 p_t(i) c_t(i) di = \int_0^1 p_t(i) \times \left(\frac{p_t(i)}{P_t}\right)^{-\sigma} C_t di \\ &= \frac{C_t}{P_t^{-\sigma}} \int_0^1 p_t(i)^{1-\sigma} di \\ &= C_t P_t^{\sigma} P_t^{1-\sigma} \\ &= C_t P_t \end{aligned} \quad (176)$$

La matrice hessienne du Lagrangien montre qu'il s'agit d'un maximum. En effet, on a

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial c_t^2(i)} = -\frac{1}{\sigma} c_t(i)^{-\frac{(1+\sigma)}{\sigma}} \times \frac{1}{\sigma-1} \left(\int_0^1 c_t(i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} di\right)^{\frac{-\sigma}{\sigma-1}} \times \left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right) c_t(i)^{-\frac{1}{\sigma}} < 0 \quad \forall i \quad (177)$$

et

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial c_t(i) \partial c_t(j)} = 0 \quad \forall i \neq j. \quad (178)$$

La matrice hessienne  $\mathbf{D}^2\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial c_t^2(i)} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial c_t(i)\partial c_t(j)} & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial c_t(j)\partial c_t(i)} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial c_t^2(j)} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$  est donc une matrice diagonale

telle que  $\text{signum}\{\mathbf{D}^2\mathcal{L}\} = \begin{bmatrix} - & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & - & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & - & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$ .

Soit  $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \cdots \end{bmatrix}$  un vecteur de dimension  $(1 \times \infty)$ . Soit  $\mathbf{k}(c_t(i), c_t(j), \dots) = \int_0^1 p_t(i)c_t(i) di - \mathfrak{Z}_t$ .

On a

$$\mathbf{f}^T \mathbf{D}^2 \mathcal{L} \mathbf{f} \leq 0 \quad \forall \mathbf{f} : \mathbf{k}(\cdot) \mathbf{f} = 0. \quad (179)$$

Il s'agit donc bien d'un maximum.

### A.3 La contrainte budgétaire du ménage représentatif

Il s'agit de montrer que la prise en compte de la condition (22) et l'insertion de la condition (21) dans la contrainte budgétaire du programme d'optimisation du ménage (19) donne (23). On part de l'équation (17) qui est équivalente à la contrainte du programme (19) :

$$W_t \geq E_t [Q_{t,T} W_T] + \sum_{s=t}^{T-1} E_t [Q_{t,s} (P_s C_s + \Delta_s M_s)] - \sum_{s=t}^{T-1} E_t \left[ Q_{t,s} \left( \int_0^1 w_s(I) h_s(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_s(i) di - T_s \right) \right]. \quad (17)$$

Exprimée à la période  $T$ , la condition (21) s'écrit

$$W_T \geq - \sum_{S=T}^{\infty} E_T \left[ Q_{T,S} \left( \int_0^1 w_S(I) h_S(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_S(i) di - T_S \right) \right] \quad (180)$$

En appliquant l'opérateur  $E_t$  et le facteur d'actualisation entre  $t$  et  $T$  à l'inégalité (180), on trouve

$$E_t [Q_{t,T} W_T] \geq - \sum_{S=T}^{\infty} E_t \left[ Q_{t,S} \left( \int_0^1 w_S(I) h_S(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_S(i) di - T_S \right) \right]. \quad (181)$$

En additionnant respectivement les termes de gauche et de droite de (181) et de (17), l'inégalité exprimée par la contrainte budgétaire (17) reste valable et l'on obtient :

$$W_t + E_t [Q_{t,T} W_T] \geq E_t [Q_{t,T} W_T] + \sum_{s=t}^{T-1} E_t [Q_{t,s} (P_s C_s + \Delta_s M_s)] - \sum_{s=t}^{\infty} E_t \left[ Q_{t,s} \left( \int_0^1 w_s(I) h_s(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_s(i) di - T_s \right) \right], \quad (182)$$

ou encore

$$W_t + \sum_{s=t}^{\infty} E_t \left[ Q_{t,s} \left( \int_0^1 w_s(I) h_s(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_s(i) di - T_s \right) \right] \geq \sum_{s=t}^{T-1} E_t [Q_{t,s} (P_s C_s + \Delta_s M_s)] \quad (183)$$

Le membre de gauche de (183) est indépendant de la période  $T$  et strictement inférieur à  $+\infty$  grâce à la condition (22). Le membre de droite de (183) est une série non-décroissante en  $T$ . Lorsque  $T$  croît, cette série doit converger vers la borné supérieure du membre de gauche de (183). Par conséquent, on peut écrire :

$$W_t + \sum_{s=t}^{\infty} E_t \left[ Q_{t,s} \left( \int_0^1 w_s(I) h_s(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_s(i) di - T_s \right) \right] \geq \sum_{s=t}^{\infty} E_t [Q_{t,s} (P_s C_s + \Delta_s M_s)] \quad (184)$$

En isolant  $C_t$ , on trouve :

$$C_t \leq \frac{\sum_{s=t}^{\infty} E_t \left[ Q_{t,s} \left( \int_0^1 w_s(I) h_s(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_s(i) di - \Delta_s M_s - T_s \right) \right]}{P_t} + \frac{W_t - \sum_{s=t+1}^{\infty} E_t [Q_{t,s} (P_s C_s)]}{P_t} \quad (23)$$

#### A.4 Dérivation de la condition de transversalité

Il s'agit de montrer que la contrainte budgétaire sous forme d'égalité

$$C_t = \frac{\sum_{s=t}^{\infty} E_t \left[ Q_{t,s} \left( \int_0^1 w_s(I) h_s(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_s(i) di - \Delta_s M_s - T_s \right) \right]}{P_t} + \frac{W_t - \sum_{s=t+1}^{\infty} E_t [Q_{t,s} (P_s C_s)]}{P_t} \quad (29)$$

implique la condition de transversalité

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E_t [Q_{t,T} W_T] = 0. \quad (30)$$

On réécrit d'abord (29) sous la forme

$$W_t = \sum_{s=t}^{\infty} E_t [Q_{t,s} \mathfrak{C}_s] \quad (185)$$

avec  $\mathfrak{C}_s = P_s C_s + \Delta_s M_s - \int_0^1 w_s(I) h_s(I) dI - \int_0^1 \mathcal{P}_s(i) di + T_s$ , on encore

$$W_t = \sum_{s=t}^{T-1} E_t [Q_{t,s} \mathfrak{C}_s] + \sum_{s=T}^{\infty} E_t [Q_{t,s} \mathfrak{C}_s] \quad (186)$$

Ensuite, on exprime (185) à la période  $T$  :

$$W_T = \sum_{s=T}^{\infty} E_T [Q_{T,s} \mathfrak{C}_s] \quad (187)$$

ce qui permet de remarquer que

$$E_t [Q_{t,T} W_T] = \sum_{s=T}^{\infty} E_t [Q_{t,s} \mathfrak{C}_s]. \quad (188)$$

On peut donc réécrire (188) :

$$E_t [Q_{t,T} W_T] = W_t - \sum_{s=t}^{T-1} E_t [Q_{t,s} \mathfrak{C}_s]. \quad (189)$$

On cherche maintenant la limite de  $E_t[Q_{t,T}W_T]$  lorsque  $T$  converge vers l'infini. On exploite pour cela le fait que  $W_t = \sum_{s=t}^{\infty} E_t[Q_{t,s}\mathfrak{C}_s]$  est borné, ce qui implique que  $\sum_{s=t}^{T-1} E_t[Q_{t,s}\mathfrak{C}_s]$  est également borné, et donc :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E_t[Q_{t,T}W_T] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ W_t - \sum_{s=t}^{T-1} E_t[Q_{t,s}\mathfrak{C}_s] \right\} = W_t - \sum_{s=t}^{\infty} E_t[Q_{t,s}\mathfrak{C}_s]. \quad (190)$$

Comme (185) montre que  $W_t = \sum_{s=t}^{\infty} E_t[Q_{t,s}\mathfrak{C}_s]$ , on trouve effectivement

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E_t[Q_{t,T}W_T] = 0. \quad (30)$$

## A.5 Conditions de deuxième ordre du problème d'optimisation

Pour vérifier si les conditions de premier ordre trouvées dans le problème d'optimisation intertemporelle du ménage sont associées à un maximum, on utilise la matrice hessienne du Lagrangien, une matrice de dimension  $(\infty \times \infty)$  :

$$\mathbf{D}^2 \mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial C_t^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial C_t \partial h_t(I)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial C_t \partial h_t(J)} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial C_t \partial C_{t+1}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial C_t \partial h_{t+1}(I)} & \cdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_t(I) \partial C_t} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_t(I)^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_t(I) \partial h_t(J)} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_t(I) \partial C_{t+1}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_t(I) \partial h_{t+1}(I)} & \cdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_t(J) \partial C_t} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_t(J) \partial h_t(I)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_t(J)^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_t(J) \partial C_{t+1}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_t(J) \partial h_{t+1}(I)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial C_{t+1} \partial C_t} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial C_{t+1} \partial h_t(I)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial C_{t+1} \partial h_t(J)} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial C_{t+1}^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial C_{t+1} \partial h_{t+1}(I)} & \cdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_{t+1}(I) \partial C_t} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_{t+1}(I) h_t(I)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_{t+1}(I) \partial h_t(J)} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_{t+1}(I) \partial C_{t+1}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_{t+1}(I)^2} & \cdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_{t+1}(J) \partial C_t} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_{t+1}(J) \partial h_t(I)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_{t+1}(J) \partial h_t(J)} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_{t+1}(J) \partial C_{t+1}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h_{t+1}(J) \partial h_{t+1}(I)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{cc}(C_t) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -v_{hh}(h_t(I)) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -v_{hh}(h_t(J)) & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{cc}(C_{t+1}) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -v_{hh}(h_{t+1}(I)) & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Comme  $u$  est une fonction concave et  $v$  une fonction convexe, on a

$$u_{cc}(C_{t+l}) \equiv \frac{\partial^2 u(C_{t+l}; \varrho_{t+l})}{\partial C_{t+l}^2} \leq 0, \quad \forall l \geq 0 \quad (191)$$

$$-v_{hh}(h_{t+l}(I)) \equiv -\frac{\partial^2 v(h_{t+l}(I); \varrho_{t+l})}{\partial h_{t+l}^2(I)} \leq 0, \quad \forall l \geq 0. \quad (192)$$

Soit  $\mathfrak{h} = \begin{bmatrix} \mathfrak{h}_1 \\ \mathfrak{h}_2 \\ \cdots \end{bmatrix}$  un vecteur de dimension  $(1 \times \infty)$ . Soit  $\mathfrak{g}(\cdot)$  défini par

$$\mathfrak{g}(C_t, h_t(I), h_t(J), \dots, C_{t+1}, h_{t+1}(I), h_{t+1}(J), \dots) = C_t + \frac{\sum_{s=t}^{\infty} Q_{t,s} \left[ -\int_0^1 w_s(I) h_s(I) dI \right] + \sum_{s=t+1}^{\infty} Q_{t,s} [P_s C_s] + \mathfrak{R}_t}{P_t}. \quad (193)$$

On a alors

$$\mathfrak{h}^T \mathbf{D}^2 \mathcal{L} \mathfrak{h} \leq 0 \quad \forall \mathfrak{h} : \mathfrak{g}(\cdot) \mathfrak{h} = 0. \quad (194)$$

Par conséquent, les conditions de premier ordre trouvées dans le problème d'optimisation du ménage représentatif sont bien associées à un maximum (cf. Varian (1995, p. 501)).

## A.6 Conditions d'équilibre dans l'industrie $I$

Chaque firme appartenant à l'industrie  $I$  est confrontée à la demande

$$y_t(i) = \left( \frac{p_t(I)}{P_t} \right)^{-\sigma} Y_t. \quad (195)$$

L'équation (222) montre que cette demande est identique pour chaque firme de l'industrie, car elles utilisent toutes le même prix de vente  $p_t(I)$ . L'identité du prix s'explique dans un environnement de prix flexibles par le fait que toutes les firmes de l'économie ont des caractéristiques identiques, i.e. notamment la même fonction de production ; dans un environnement de prix rigides au sens de Calvo (1983), il convient d'ajouter l'hypothèse que toutes les firmes de l'industrie  $I$  peuvent modifier leur prix au même moment (Woodford 2003, p. 153).

Soit  $y_t(I) = \int_{i=0}^1 y_t(i) di$  la production agrégée des différents biens  $i$  produits par l'ensemble des firmes appartenant à l'industrie  $I$ . Comme toutes les firmes du secteur  $i$  sont confrontés à des conditions identiques, elles produisent toutes la même quantité du bien  $y_t(i) = y_t(j) = \bar{y}_t \quad \forall i \neq j$ . On a

$$y_t(I) = \int_{i=0}^1 y_t(i) di = \int_{i=0}^1 \bar{y}_t di = [\bar{y}_t \times i]_0^1 = \bar{y}_t \quad (196)$$

On retient que  $y_t(i) = y_t(I)$ . Comme toutes les firmes sont caractérisées par la même fonction de production, elles utilisent nécessairement la même quantité de travail du type  $I$ , i.e. on a  $h_t(i) = h_t(j) = \bar{h}_t$ . Soit  $h_t(I) = \int_{i=0}^1 h_t(i) di$  la quantité de travail utilisé par l'ensemble des firmes de l'industrie. On trouve donc :

$$h_t(I) = \int_{i=0}^1 h_t(i) di = \bar{h}_t = h_t(i). \quad (197)$$

Les égalités  $y_t(i) = y_t(I)$  et  $h_t(i) = h_t(I)$  impliquent que l'on peut maintenant exprimer la fonction de production agrégée de l'industrie  $I$  :

$$y_t(I) = \mathcal{A}_t f(h_t(I)) \quad (198)$$

On peut maintenant remplacer dans (40)  $C_t$  par  $Y_t$  et  $h_t(I)$  par la fonction réciproque de (198). On trouve alors (48)

## A.7 Log-linéarisation autour d'un état stationnaire

Le présent document mobilise les résultats suivants :

- a. L'approximation log-linéaire autour de  $\bar{\mathcal{X}}$  d'une variable quelconque strictement positive  $\mathcal{X}_t$  est donnée par l'expression

$$\mathcal{X}_t \simeq \bar{\mathcal{X}}(1 + \hat{x}_t). \quad (199)$$

avec  $\bar{\mathcal{X}}$  la valeur de  $\mathcal{X}_t$  associées à l'état stationnaire et  $\hat{x}_t \equiv \ln \mathcal{X}_t - \ln \bar{\mathcal{X}}$

- b. L'approximation log-linéaire autour de  $(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}})$  du produit de deux variables strictement positives quelconques  $\mathcal{X}_t$  et  $\mathcal{Y}_t$  est donnée par l'expression :

$$\mathcal{X}_t \mathcal{Y}_t \simeq \bar{\mathcal{X}} \bar{\mathcal{Y}} (1 + \hat{x}_t + \hat{y}_t), \quad (200)$$

c. L'approximation log-linéaire autour de  $\bar{\mathcal{X}}$  d'une fonction de la variable  $\mathcal{X}_t$  est donnée par l'expression :

$$f(\mathcal{X}_t) \simeq f(\bar{\mathcal{X}})(1 + \epsilon_x \hat{x}_t), \quad (201)$$

$$\text{avec } \epsilon_x \equiv \frac{df(\bar{\mathcal{X}})}{d\bar{\mathcal{X}}} \frac{\bar{\mathcal{X}}}{f(\bar{\mathcal{X}})}.$$

d. L'approximation log-linéaire autour de  $(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}} = 0)$  d'une fonction des variables  $\mathcal{X}_t, \mathcal{Y}_t$  est donnée par l'expression :

$$f(\mathcal{X}_t, \mathcal{Y}_t) \simeq f(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}}) \left( 1 + \epsilon_{x,0} \hat{x}_t + \frac{\partial f(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}})}{\partial \bar{\mathcal{Y}}} \frac{\mathcal{Y}_t}{f(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}})} \right), \quad (202)$$

$$\text{avec } \epsilon_{x,0} \equiv \frac{\partial f(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}})}{\partial \bar{\mathcal{X}}} \frac{\bar{\mathcal{X}}}{f(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}})}.$$

Preuves :

a. On peut écrire :

$$\mathcal{X}_t = \bar{\mathcal{X}} \left( \frac{\mathcal{X}_t}{\bar{\mathcal{X}}} \right) = \bar{\mathcal{X}} e^{\ln(\frac{\mathcal{X}_t}{\bar{\mathcal{X}}})} = \bar{\mathcal{X}} e^{\hat{x}_t}, \quad (203)$$

i. e. que  $\mathcal{X}_t$  peut être exprimé en fonction de  $\hat{x}_t$  ( $\mathcal{X}_t = f(\hat{x}_t)$ ). Lorsque  $\mathcal{X}_t = \bar{\mathcal{X}}$ , on a  $\hat{x}_t = 0$ . L'approximation de premier ordre de Taylor autour de  $\hat{x}_t = 0$  s'écrit alors :

$$\mathcal{X}_t \simeq f(0) + f'(0)(\hat{x}_t - 0) = \bar{\mathcal{X}} e^0 + \bar{\mathcal{X}} e^0(\hat{x}_t - 0) = \bar{\mathcal{X}}(1 + \hat{x}_t), \quad (204)$$

$$\text{car } \frac{d(\bar{\mathcal{X}} e^{\hat{x}_t})}{d\hat{x}_t} = \bar{\mathcal{X}} e^{\hat{x}_t}.$$

b. On trouve de manière analogue pour une autre variable quelconque strictement positive  $\mathcal{Y}_t$  :

$$\mathcal{Y}_t \simeq \bar{\mathcal{Y}}(1 + \hat{y}_t), \quad (205)$$

Par conséquent, on peut approcher le produit des variables  $\mathcal{X}_t$  et  $\mathcal{Y}_t$  par l'expression :

$$\mathcal{X}_t \mathcal{Y}_t \simeq \bar{\mathcal{X}} \bar{\mathcal{Y}} (1 + \hat{x}_t + \hat{y}_t), \quad (206)$$

car  $\hat{x}_t \hat{y}_t \simeq 0$ . En effet,  $\mathcal{X}_t$  est supposé proche de  $\bar{\mathcal{X}}$  et  $\mathcal{Y}_t$  proche de  $\bar{\mathcal{Y}}$ , ce qui implique que  $\hat{x}_t$  et  $\hat{y}_t$  sont proches de zéro et que le terme  $\hat{x}_t \hat{y}_t$  peut être négligé.

c. L'approximation de premier ordre de Taylor autour de l'état stationnaire  $\bar{\mathcal{X}}$  de la fonction  $f(\mathcal{X}_t)$  s'écrit :

$$f(\mathcal{X}_t) \simeq f(\bar{\mathcal{X}}) + f'(\bar{\mathcal{X}})(\mathcal{X}_t - \bar{\mathcal{X}}) = f(\bar{\mathcal{X}}) + f'(\bar{\mathcal{X}}) \bar{\mathcal{X}} \left( \frac{\mathcal{X}_t}{\bar{\mathcal{X}}} - 1 \right). \quad (207)$$

Pour  $\mathcal{X}_t$  proche de  $\bar{\mathcal{X}}$ , on a  $\frac{\mathcal{X}_t}{\bar{\mathcal{X}}} - 1 \simeq \hat{x}_t$ , ce qui donne :

$$f(\mathcal{X}_t) \simeq f(\bar{\mathcal{X}}) + f'(\bar{\mathcal{X}}) \bar{\mathcal{X}} \hat{x}_t = f(\bar{\mathcal{X}}) + f(\bar{\mathcal{X}}) \frac{df(\bar{\mathcal{X}})}{d\bar{\mathcal{X}}} \frac{\bar{\mathcal{X}}}{f(\bar{\mathcal{X}})} \hat{x}_t = f(\bar{\mathcal{X}})(1 + \epsilon_x \hat{x}_t) \quad (208)$$

d. L'approximation de premier ordre de Taylor autour de l'état stationnaire  $(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}} = 0)$  de la fonction  $\mathcal{X}_t, \mathcal{Y}_t$  s'écrit

$$f(\mathcal{X}_t, \mathcal{Y}_t) \simeq f(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}}) + \frac{\partial f(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}})}{\partial \bar{\mathcal{X}}}(\mathcal{X}_t - \bar{\mathcal{X}}) + \frac{\partial f(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}})}{\partial \bar{\mathcal{Y}}}(\mathcal{Y}_t - 0) \quad (209)$$

ou encore

$$\begin{aligned} f(\mathcal{X}_t, \mathcal{Y}_t) &\simeq f(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}}) + f(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}}) \frac{\partial f(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}})}{\partial \bar{\mathcal{X}}} \frac{\bar{\mathcal{X}}}{f(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}})} \hat{x}_t \\ &\quad + f(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}}) \frac{\partial f(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}})}{\partial \bar{\mathcal{Y}}} \frac{\mathcal{Y}_t}{f(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}})} \\ &\simeq f(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}}) \left( 1 + \epsilon_{x,0} \hat{x}_t + \frac{\partial f(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}})}{\partial \bar{\mathcal{Y}}} \frac{\mathcal{Y}_t}{f(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}})} \right). \end{aligned} \quad (210)$$

## A.8 Approximation log-linéaire du taux d'intérêt réel

Pour des petites valeurs de  $\bar{r}, \bar{i}, \bar{\pi}, r_t, i_t$  et  $E_t[\pi_{t+1}]$ , on obtient l'approximation log-linéaire du taux d'intérêt réel ex ante de la manière suivante : la définition exacte du taux d'intérêt réel ex ante

$$r_t = \frac{1 + i_t}{1 + E_t[\pi_{t+1}]} - 1 \quad (211)$$

peut être approchée par l'expression linéaire

$$r_t \simeq i_t - E_t[\pi_{t+1}]. \quad (212)$$

En substituant à  $i_t$  et  $E_t[\pi_{t+1}]$  les valeurs associées à l'état stationnaire  $(\bar{\Pi}, \bar{Y}, 0, 0)$ , on trouve l'expression linéaire du taux d'intérêt réel de long terme

$$\bar{r} \simeq \bar{i} - \bar{\pi}. \quad (213)$$

On soustrait maintenant  $\bar{r}$  des membres de gauche et de droite de l'expression linéaire du taux d'intérêt réel ex ante :

$$r_t - \bar{r} \simeq i_t - E_t[\pi_{t+1}] - \bar{r} \simeq i_t - \bar{i} - E_t[\pi_{t+1}] - \bar{\pi}. \quad (214)$$

Comme  $\ln\left(\frac{1+i_t}{1+\bar{i}}\right) \simeq \mathcal{X}_t - \bar{\mathcal{X}}$  pour des petites valeurs de  $\mathcal{X}_t$  et de  $\bar{\mathcal{X}}$ , on peut approcher cette dernière équation par

$$\hat{r}_t \simeq \hat{i}_t - E_t[\hat{\pi}_{t+1}], \quad (215)$$

avec  $\hat{r}_t \equiv \ln\left(\frac{1+r_t}{1+\bar{r}}\right)$  et  $\hat{\pi}_{t+1} \equiv \ln\left(\frac{1+\pi_{t+1}}{1+\bar{\pi}}\right)$ . Dans le cas particulier retenu ici où  $\bar{\pi} = 0$  et donc  $\bar{r} \simeq \bar{i}$ , ce qui donne

$$r_t - \bar{r} \simeq i_t - \bar{i} + E_t[\pi_{t+1}]. \quad (216)$$

On trouve maintenant l'approximation log-linéaire

$$\hat{r}_t \simeq \hat{i}_t - E_t[\pi_{t+1}] \quad (217)$$

(cf. Woodford (2003, p. 79)).

## A.9 Log-linéarisation de la définition implicite de la production naturelle

Pour justifier le passage de l'équation (150) à (151), on doit montrer que

$$\epsilon_{vh} = -\frac{\partial v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))}{\partial \bar{A}} \times \frac{\bar{A}}{v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))} \quad (218)$$

et

$$\epsilon_\psi = -\frac{d\Psi(\bar{Y}/\bar{A})}{d\bar{A}} \times \frac{\bar{A}}{\Psi(\bar{Y}/\bar{A})}. \quad (219)$$

On développe d'abord l'écriture du terme  $\frac{\partial v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))}{\partial \bar{A}} \times \frac{\bar{A}}{v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))}{\partial \bar{A}} \times \frac{\bar{A}}{v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))} &= \\ &= \frac{\partial v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))}{\partial(\bar{Y}/\bar{A})} \times \frac{\partial(\bar{Y}/\bar{A})}{\partial \bar{A}} \times \frac{\bar{A}}{v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))}. \end{aligned} \quad (220)$$

De la même manière, on développe  $\epsilon_{vh} \equiv \frac{\partial v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))}{\partial \bar{Y}} \times \frac{\bar{Y}}{v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))}$  :

$$\epsilon_{vh} = \frac{\partial v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))}{\partial(\bar{Y}/\bar{A})} \times \frac{\partial(\bar{Y}/\bar{A})}{\partial \bar{Y}} \times \frac{\bar{Y}}{v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))}. \quad (221)$$

Ensuite, on remarque que

$$\frac{\partial v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))}{\partial(\bar{Y}/\bar{A})} \times \frac{\partial(\bar{Y}/\bar{A})}{\partial \bar{A}} \times \frac{\bar{A}}{v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))} = \frac{\partial v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))}{\partial(\bar{Y}/\bar{A})} \times \frac{-\bar{Y}\bar{A}^{-1}}{v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))} \quad (222)$$

et

$$\frac{\partial v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))}{\partial(\bar{Y}/\bar{A})} \times \frac{\partial(\bar{Y}/\bar{A})}{\partial \bar{Y}} \times \frac{\bar{Y}}{v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))} = \frac{\partial v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))}{\partial(\bar{Y}/\bar{A})} \times \frac{\bar{Y}\bar{A}^{-1}}{v_h(f^{-1}(\bar{Y}/\bar{A}))}, \quad (223)$$

ce qui prouve (218). Un raisonnement analogue prouve (219).

## A.10 Relation entre $x_t$ et $Y_t$ et entre $\pi_t$ et $\Pi_t$

Il s'agit de montrer que des baisses de l'écart de production et de l'inflation correspondent à des diminutions du facteur d'inflation  $\Pi_t$  et de la production courante  $Y_t$ .

Pour s'apercevoir de cela, on peut exprimer  $Y_t$  en fonction de  $x_t$  et  $\Pi_t$  en fonction de  $\pi_t$  :  $Y_t \equiv Y_t^n e^{x_t}$  et  $\Pi_t \equiv \pi_t + 1$ . La formule « toutes choses égales par ailleurs » signifie notamment que les variables naturelles  $Y_t^n$  et  $r_t^n$  restent inchangées. Dans ces conditions, on obtient :

$$\frac{\partial Y_t}{\partial \hat{i}_t} \simeq -\phi Y_t^n e^{x_t} < 0 \quad (224)$$

et

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial \hat{i}_t} \simeq -\phi \lambda < 0. \quad (225)$$

### A.11 Dérivée partielle de la fonction réciproque $u_c^{-1}$

Pour alléger les notations, on retient ici la fonction d'utilité du ménage sans indices temporelles :  $u_c(C; \varrho)$ . Pour  $\varrho$ , on suppose une valeur constante :  $\varrho = \varrho_0$ . On note  $\mathbf{u} = u_c(C; \varrho_0)$  et  $\mathbf{u}_0 = u_c(C_0; \varrho_0)$ , ce qui implique  $u_c^{-1}(\mathbf{u}; \varrho_0) = C$  et  $u_c^{-1}(\mathbf{u}_0; \varrho_0) = C_0$ . La dérivée partielle de  $u_c^{-1}$  par rapport à  $u_c$  au point  $(\mathbf{u}_0; \varrho_0)$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_c^{-1}}{\partial u_c}(\mathbf{u}_0; \varrho_0) &= \frac{\partial u_c^{-1}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_0; \varrho_0) = \lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_0} \frac{u_c^{-1}(\mathbf{u}; \varrho_0) - u_c^{-1}(\mathbf{u}_0; \varrho_0)}{\mathbf{u} - \mathbf{u}_0} \\ &= \frac{1}{\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_0} \frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}_0}{u_c^{-1}(\mathbf{u}; \varrho_0) - u_c^{-1}(\mathbf{u}_0; \varrho_0)}} \\ &= \frac{1}{\lim_{C \rightarrow C_0} \frac{u_c(C; \varrho_0) - u_c(C_0; \varrho_0)}{C - C_0}} \\ &= \frac{1}{\frac{\partial u_c}{\partial C}(C_0; \varrho_0)} = \frac{1}{u_{cc}(C_0; \varrho_0)}. \end{aligned} \quad (226)$$

### A.12 Absence structurelle de l'épargne nationale

Il s'agit de montrer qu'à l'équilibre du nouveau modèle keynésien, l'épargne nationale ne peut pas être différente de zéro.

Chaque ménage est confronté à la contrainte budgétaire (10), qui est saturé à l'équilibre et qui s'écrit alors :

$$M_t + B_t = W_t + \int_0^1 w_t(I)h_t(I) dI + \int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di - T_t - C_t P_t. \quad (227)$$

Le profit agrégé des firmes est la différence entre leur chiffre d'affaires agrégé et la masse salariale versée aux ménages :

$$\int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di = Y_t P_t - \int_0^1 w_t(I)h_t(I) dI. \quad (228)$$

En substituant le terme  $\int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di$  dans (227) par le membre de droite de (228), on trouve :

$$M_t + B_t = W_t + Y_t P_t - T_t - C_t P_t. \quad (229)$$

A l'équilibre général, on a  $Y_t = C_t$ , l'équation (229) devient alors :

$$M_t + B_t = W_t - T_t \quad \forall t. \quad (230)$$

L'épargne nationale  $\mathcal{S}_t^n$  est la somme de l'épargne privée  $\mathcal{S}_t^m$  et de l'épargne publique  $\mathcal{S}_t^g$

$$\mathcal{S}_t^n = \mathcal{S}_t^m + \mathcal{S}_t^g. \quad (231)$$

L'épargne privée est la différence entre les revenus du ménage représentatif et ses dépenses :

$$\mathcal{S}_t^m = W_t - B_{t-1} - M_{t-1} + \int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di + \int_0^1 w_t(I)h_t(I) dI - T_t - C_t P_t, \quad (232)$$

avec  $W_t - B_{t-1} - M_{t-1} + \int_0^1 \mathcal{P}_t(i) di$  les revenus financiers (rémunération des titres et profits perçus),  $\int_0^1 w_t(I)h_t(I) dI$  les revenus du travail,  $T_t$  les dépenses d'impôt et  $C_t P_t$  les dépenses de consommation. D'après (228), on a

$$\mathcal{S}_t^m = W_t - B_{t-1} - M_{t-1} - T_t. \quad (233)$$

L'épargne publique et la différence entre les revenus d'impôt du gouvernement et ses dépenses de rémunération des obligations publiques et des avoirs en monnaie :

$$\mathcal{S}_t^g = T_t - i_{t-1}B_{t-1}^s - i_{t-1}^m M_{t-1}^s \quad (234)$$

D'après la définition de l'impôt (77), et dans la mesure où on a à l'équilibre  $i_{t-1} = i_{t-1}^m$ , on obtient :

$$\mathcal{S}_t^g = (1 + i_{t-1})D_{t-1} - D_t - i_{t-1}B_{t-1}^s - i_{t-1}^m M_{t-1}^s = B_{t-1}^s + M_{t-1}^s - B_t^s - M_t^s \quad (235)$$

A l'équilibre, l'égalité entre offre et demande de titres et de monnaie est vérifiée ( $M_t^s = M_t$  et  $B_t^s = B_t$ , cf. Woodford (2003, p. 71)). On trouve alors pour l'épargne nationale :

$$\mathcal{S}_t^n = W_t - T_t - B_t - M_t \quad (236)$$

ce qui donne d'après l'équation (230) :

$$\mathcal{S}_t^n = 0. \quad (237)$$

## Références

- Bullard, J. B. & Mitra, K. (2002), 'Learning about Monetary Policy Rules', *Journal of Monetary Economics* **49**(6), 1105–1129.
- Calvo, G. A. (1983), 'Staggered Prices in a Utility-Maximizing Framework', *Journal of Monetary Economics* **12**(3), 383–398.
- Clarida, R., Gali, J. & Gertler, M. (1999), 'The Science of Monetary Policy : A New Keynesian Perspective', *Journal of Economic Literature* **37**(4), 1661–1707.
- Dixit, A. K. & Stiglitz, J. E. (1977), 'Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity', *American Economic Review* **67**(3), 297–308.
- Evans, G. W. & Honkapohja, S. (2003), 'Adaptive Learning and Monetary Policy Design', *Journal of Money, Credit and Banking* **35**(6), 1045–1072.
- Fisher, I. (1930), *The Theory of Interest*, Macmillan, New York.
- Friedman, M. (1968), 'The Role of Monetary Policy', *American Economic Review* **58**(1), 1–17.
- Galí, J. (2008), *Monetary Policy, Inflation and the Business Cycle : An Introduction to the New Keynesian Framework*, Princeton University Press, Princeton.
- Galí, J. & Gertler, M. (2007), 'Macroeconomic Modeling for Monetary Policy Evaluation', *Journal of Economic Perspectives* **21**(4), 25–45.
- Goodfriend, M. & King, R. (1997), The New Neoclassical Synthesis and the Role of Monetary Policy, in 'NBER Macroeconomics Annual 1997, Volume 12', NBER Chapters, National Bureau of Economic Research, Inc, pp. 231–296.
- Hicks, J. R. (1937), 'Mr. Keynes and the "Classics" : A Suggested Interpretation', *Econometrica* **5**(2), 147–159.
- Kirman, A. (1992), 'Whom or What Does the Representative Individual Represent', *The Journal of Economic Perspectives* **6**(2), 117–136.

- McCallum, B. T. & Nelson, E. (1999), Performance of Operational Policy Rules in an Estimated Semi-Classical Model, *in* J. Taylor, ed., ‘Monetary Policy Rules’, University of Chicago Press, Chicago, pp. 15–45.
- Obstfeld, M. & Rogoff, K. (1996), *Foundations of International Macroeconomics*, MIT Press, Cambridge.
- Phelps, E. S. (1967), ‘Phillips Curves, Expectations of Inflation and Optimal Unemployment over Time’, *Economica* **34**, 254–281.
- Preston, B. (2005), ‘Learning about Monetary Policy Rules when Long-Horizon Expectations Matter’, *International Journal of Central Banking* **1**(2), 81–126.
- Rotemberg, J. L. (1987), The New Keynesian Microfoundations, *in* ‘NBER Macroeconomics Annual 1987, Volume 2’, NBER Chapters, National Bureau of Economic Research, Inc, pp. 69–116.
- Salle, I. (2013), ‘Ciblage d’inflation, transparence et anticipations - une revue de la littérature récente’, *Revue d’Economie Politique* **123**(5), 697–736.
- Taylor, J. B. (1993), ‘Discretion versus Policy Rules in Practice’, *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* **39**(1), 195–214.
- Varian, H. R. (1995), *Analyse Microéconomique*, De Boeck, Bruxelles.
- Walsh, C. E. (2003), *Monetary Theory and Policy*, MIT Press, Cambridge.
- Wicksell, K. (1898), *Geldzins und Güterpreise*, Gustav Fischer Verlag, Jena.
- Woodford, M. (2003), *Interest and Prices : Foundations of a Theory of Monetary Policy*, Princeton University Press, Princeton.
- Zumpe, M. (2010), Règles de politique monétaire, apprentissage et stabilité : une revue de la littérature récente, Cahiers du GREThA 2010-01, Groupe de Recherche en Economie Théorique et Appliquée.
- Zumpe, M. (2011), ‘Détermination, apprentissage adaptatif et règles de politique monétaire dans le nouveau modèle canonique : un guide de lecture’, *Revue d’Economie Politique* **121**(3), 307–345.

---

## **Cahiers du GREThA**

### **Working papers of GREThA**

---

#### **GREThA UMR CNRS 5113**

Université de Bordeaux

Avenue Léon Duguit  
33608 PESSAC - FRANCE  
Tel : +33 (0)5.56.84.25.75  
Fax : +33 (0)5.56.84.86.47

<http://gretha.u-bordeaux.fr/>

---

#### **Cahiers du GREThA (derniers numéros – last issues)**

- 2015-18 : BECUWE Stéphane, BLANCHETON Bertrand, MEISSNER Christopher, *France's international insertion strategy in globalization in long run perspective 1836-1938*
- 2015-19 : MALFAIT Jean-Jacques, MARTIN Jean-Christophe, *Identification d'une filière économique liée à l'utilisation d'une ressource naturelle renouvelable : l'exemple de la filière bois en France et en Aquitaine*
- 2015-20 : COMBRIS Pierre, GIRAUD-HERAUD Éric, Alexandra Seabra PINTO, *Relative willingness to pay and surplus comparison mechanism in experimental auctions*
- 2015-21 : GIRAUD-HERAUD Éric, PONSSARD Jean-Pierre, SINCLAIR DESGAGNE Bernard, SOLER Louis-Georges, *The Agro-Food Industry, Public Health and Environmental Protection: the Porter hypothesis to justify regulation ?*
- 2015-22 : BOKINO Régis, *Transparence dans les deux banques centrales de la zone franc africaine : évaluation et comparaison internationale*
- 2015-23 : DUCRAY François, *Les aides aux étudiants - Une question d'arbitrage entre les bourses sociales et la demi-part fiscale*
- 2015-24 : FLAMAND Marina, FRIGANT Vincent, *L'hétérogénéité des comportements des constructeurs automobiles vis-à-vis du Corporate Venture Capital*
- 2015-25 : BRESCHI Stefano, LISSONI Francesco , MIGUELEZ Ernest, *Foreign inventors in the US: Testing for Diaspora and Brain Gain Effects*
- 2015-26 : ASSOGBA Guillaume, KLEBANER Samuel, *Vers un cadre d'analyse institutionnaliste de la politique de filière : Quelle cohérence pour la politique de filière française ?*
- 2015-27 : LALANNE Aurélie, ZUMPE Martin, *Zipf's law, Gibrat's law and Cointegration*
- 2015-28 : CHARLES Léo, *Evolution of trade patterns and economic performance: the case of France and Switzerland during the nineteenth century*
- 2015-29 : LLOPIS Oscar, *Who do you care about? Scientists' personality traits and perceived beneficiary impact*

---

La coordination scientifique des Cahiers du GREThA est assurée par Emmanuel PETIT.

La mise en page est assurée par Julie VISSAGUET